

Úvod do teorie grup: Cvičení 5

25. října 2021

1. Spočtete $C_{S_4}((12))$. Kolik prvků S_4 je s (12) konjugovaných?
2. Rozmyslete si, že pro $H \leq G$ je $N_G(H) = G$ právě tehdy, když je H normální podgrupa G .
3. Buď G grupa, $M \subseteq G$ a $H \leq G$. Dokažte, že $Z(G) \leq N_G(M) \leq G$ a $H \leq N_G(H) \leq G$.
4. Rozmyslete si, že $\bigcap_{x \in G} C_G(x) = Z(G)$.
5. Spočtete $N_{S_3}(H)$ pro všechny $H \leq S_3$.
6. Buď H, K podgrupy grupy G takové, že $H \trianglelefteq K \leq G$. Ukažte, že $K \leq N_G(H)$.
7. Buď G grupa a uvažujme její akci na množině X . Dále mějme $g \in G$ a $x, y \in X$ splňující $g \cdot x = y$. Dokažte, že $G_y = gG_xg^{-1}$.
8. Z předchozího příkladu vyvoďte, že pro $a, x \in G$ platí $C_G(aga^{-1}) = aC_G(g)a^{-1}$.
9. Buď G grupa, $a \in G$ a $H \leq G$. Dokažte, že $N_G(aHa^{-1}) = aN_G(H)a^{-1}$.

Další příklady:

10. Spočtete $N_{S_4}(K_4)$, kde K_4 je podgrupa S_4 izomorfní Kleinově podgrupě (viz cv. 2).
11. Ukažte, že grupa $SL_2(\mathbb{R})$ působí na horní polorovině komplexních čísel akcí definovanou

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Je tato akce transitivní? Najděte jádro této akce a stabilizátor prvku i .

12. Dokažte, že $N_{S_4}(\langle\langle(1234)\rangle\rangle) \cong D_8$.
13. Buď G konečná grupa a p nejmenší prvočíslo dělící $|G|$. Dokažte, že každá podgrupa indexu p je normální.
14. Buď $a \in S_n$ cyklus délky n . Ukažte, že $C_{S_n}(a) = \langle a \rangle$.
- * 15. Buď T těleso a $|T| > 2$ a označme $G = GL_n(T)$. Uvažujme $H \leq G$ tvořenou právě všemi diagonálními maticemi.
 - (a) Ukažte $N_G(H)$ je grupa všech monomiálních matic¹.
 - (b) Dokažte, že $N_G(H)/H \cong S_n$.

Hinty:

Obecně – vycházejte z definic daných pojmů.

10. Normálnost je fajn vlastnost.

12. Uvažte dihedrální grupu jako vhodnou podgrupu S_4 .

13. Uvažujte akci, kterou G působí na rozkladových třídách G podle té podgrupy. Najděte jádro této akce.

¹Matici nezmene *monomiální*, pokud v každém řádku i sloupci má právě jeden nenulový prvek.