Úvod do teorie grup: Cvičení 4

25. října 2021

1. Ukažte, že $S_n \cong A_n \rtimes Z_2$ pro vhodný semidirektní součin.
2. Ukažte, že $GL_n(T) \cong SL_n(T) \rtimes T^*$ pro vhodný semidirektní součin.
3. Najděte všechny semidirektní součiny $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$.
4. Buď H grupa. Ukažte, že jediný semidirektní součin $\mathbb{Z}_2 \rtimes H$ je izomorfní $\mathbb{Z}_2 \times H$.
5. Dokažte, že grupu Q_8 nelze získat jako netriviální semidirektní součin.

Další příklady:

6. Buď G grupa řádu pq pro prvočísla p, q a předpokládejme, že není jednoduchá. Ukažte, že G lze zapsat jako jeden ze semidirektních součinů $Z_p \rtimes Z_q$ a $Z_q \rtimes Z_p$.
7. Najděte všechny semidirektní součiny $\mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_2$.
8. Najděte všechny semidirektní součiny $\mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_3$.
9. Pro prvočíslo p spočítejte všechny semidirektní součiny $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$.
10. Najděte všechny semidirektní součiny $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2^2$.
11. Najděte všechny semidirektní součiny $S_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$.
12. Najděte všechny semidirektní součiny $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$. Jsou všechny tyto grupy abelovské?
13. Uvažujte $\mathbb{Z}_p^2 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_p$, kde $\varphi : \mathbb{Z}_p \to GL_2(\mathbb{Z}_p)$ je dáno předpisem $\varphi(i) \to \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dokažte, že pro $p = 2$ jde o D_8 a pro $p > 2$ se jedná o neabelovskou grupu řádu p^3.
14. Uvažujme grupu G a její normální podgrupu K. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:
    (a) G je semidirektní součin $K \rtimes G/K$,
    (b) existuje podgrupa $Q \leq G$ taková, že každý prvek $g \in G$ má jednoznačné vyjádření $g = ax$ pro $a \in K$, $x \in Q$,
    (c) existuje homomorfismus $s : G/K \to G$ splňující $vs = 1_{G/K}$, kde $v : G \to G/K$ je přirozená projekce,
    (d) existuje homomorfismus $\pi : G \to G$ splňující $\mathrm{Ker}\, \pi = K$ a $\pi(x) = x$ pro všechna $x \in \mathrm{Im}\, \pi$,
    (e) $G = K \rtimes H$ pro vhodnou podgrupu $H \leq G$ a vhodný semidirektní součin.

Hinty:

Obecně – při hledání všech homomorfismů se rozhodněte, na které automorfismy zobrazíte generátor(y). Uvažujte řády prvků.

1., 2. Najděte grupy tvořící semidirektní součin jako vhodné podgrupy výsledné grupy.

5. Jak vypadají podgrupy Q_8?

9. Jaké řády mají grupy, mezi kterými hledáme všechny homomorfismy?