Úvod do teorie grup: Cvičení 2

11. října 2021

1. Ukažte, že pro nesoudělná m, n je jediný homomorfismus mezi $\mathbb{Z}_n$ a $\mathbb{Z}_m$ triviální.
2. Určete, které čtyřprvkové grupě je izomorfní $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4/\langle(1,2)\rangle$.
3. a) Dokažte, že G' je normální podgrupa G.

   b) Obecněji, pro grupy $G' \leq H \leq G$ ukažte, že $H \trianglelefteq G$.
4. Kleinovu grupu lze ve smyslu $K_4 = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ chápat jako podgrupu S_4. Dokažte, že je normální a že $S_4/K_4 \cong S_3$.
5. Určete následující grupy: S_3', A_4', D_8'.
6. Ukažte, že faktorgrupa $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je izomorfní jednotkové kružnici S^1 v $\mathbb{C}$ (s operací násobení).
7. Pro následující dvojice grupa/podgrupa dokažte, že příslušná podgrupa je normální a určete, které známé grupě je izomorfní faktorgrupa: $GL_n(T)/SL_n(T)$, $Q_8/\{\pm 1\}$, $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^+$.

Další příklady:

8. Uvažujme homomorfismus $f : G_1 \to G_2$ a buď S_2 podgrupa G_2. Ukažte, že $f^{-1}(S_2)$ je podgrupa G obsahující $\mathrm{Ker} f$.
9. Buď S a T libovolné podgrupy konečné grupy G. Dokažte, že $|ST||S \cap T| = |S||T|$.
10. Ukažte, že $\mathbb{C}^*/\{\pm 1\} \cong \mathbb{C}^*$.
11. Určete D_{2n}'.
12. Ukažte, že $S_n' = A_n$ a pro $n \geq 5$ platí $A_n' = A_n$.
13. Buď $K \trianglelefteq G$ a S, T libovolné podgrupy G obsahující K. Ukažte, že $S/K = T/K$ právě tehdy, když $S = T$.
14. Buď $K \trianglelefteq G$ a uvažujme libovolnou podgrupu A faktorgrupy G/K. Ukažte, že existuje podgrupa $S \leq G$ obsahující K taková, že $A = S/K$.
15. Buď $K \trianglelefteq G$ a označme π přirozenou projekci z $G \to G/K$. Dále uvažujme podgrupy $K \leq T \leq S \leq G$. Dokažte, že zobrazení $sT \to \pi(s)T/K, s \in S$ je bijekcí mezi levými rozkladovými třídami T v S a levými rozkladovými třídami T/K v S/K. Z toho odvoďte, že $[S : T] = [S/K : T/K]$.
16. Buď G grupa lichého řádu. Dokažte, že součin všech prvků G (v libovolném pořadí) leží v G'.

$**$ 17. Určete derivovanou podgrupu $GL_n(T)$.

Hinty:

3.b) Vyjádřete konjugovaný prvek jako násobek nějakého komutátoru.

4. Ukažte, že faktorgrupa obsahuje ≥ 2 prvky řádu 2. Tedy nejde o $\mathbb{Z}_6$; jediná další grupa řádu 6 je S_3.

6. Vyložte si prvek $\mathbb{R}$ jako argument komplexního čísla.

9. Ukažte, že prvek $s \cdot t \in ST$ jde jako chtěný součin vyjádřit právě jako $sd \cdot d^{-1}t$ pro $d \in S \cap T$.

12. Uvažte generátory A_n, nebo si rozmyslete, jak vypadají normální podgrupy S_n a A_n.

16. Bez důkazu můžete použít tvrzení (z příští přednášky), že G/G' je abelovská.

17. Vyjde to $SL_n(T)$ až na případ $n = 2$, $T = \mathbb{Z}_2$. Najdi elementární matice jako komutátory.

Alternativní řešení 4: Uvažujme působení S_4 konjugací na množině $X = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset S_4$, čili homomorfismus $\varphi : S_4 \to S_X$. Dokažte, že je dobře definovaný, surjektivní a jeho jádro je K_4. (Pro surjektivitu uvažujte, jak působí prvky $S_3 \subset S_4$.)