Úvod do teorie grup: Cvičení 11

13. prosince 2021

1. Najděte prezentace grup $\mathbb{Z}_{17}$ a D_{10}.
2. Najděte prezentace grup $\mathbb{Z}_n$ a D_{2n} pro přirozené n.
3. Dokažte, že $\langle x, y | x^3 = 1, y^2 = 1, xy = yx \rangle$ je prezentace grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$. Odvoďte, že grupa může mít více různých prezentací.
4. Jakou grupu určuje prezentace $\langle x, y | x^2 = y^2 = (xy)^3 = 1 \rangle$?
5. Ukažte, že platí $Q = \langle x, y | x^4 = 1, x^2 = y^2, xyx = y \rangle$, kde Q je grupa kvaternionů. Ukažte, že dokonce $Q = \langle x, y | x^2 = y^2, xyx = y \rangle$.
6. Z klasifikace konečných grup známe grupu X řádu 12 danou jako netriviální semidirektní součin $\mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4$. Dokažte, že má prezentaci $\langle x, y | x^3 = y^4 = 1, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle$.

Další příklady:

7. Najděte nějakou prezentaci grupy $\mathbb{Z}_2 \times D_8$.
8. Najděte nějakou prezentaci grupy $\mathbb{Z}^2$. ($*$ Obecně najděte prezentaci pro volnou abelovskou grupu s bází B.)
9. Buď $X = \{x_i; i \in \mathbb{N}\}$. Ukažte, že $\langle X | x_1^p = 1, x_2^p = x_1, x_3^p = x_2, \dots \rangle$ je prezentace Prüferovy p-grupy.
10. Pro přirozené číslo n najděte nějakou prezentaci grupy S_n.
11. Rozmyslete si, že každá konečná grupa má nějakou konečnou prezentaci.
12. Ukažte, že prezentace $\langle x, y | x^{-1}yx = y^2, y^{-1}xy = x^2 \rangle$ popisuje jednoprvkovou grupu.
13. Rozmyslete si, že prezentace $\langle x, y | x^3 = y^3 = 1 \rangle$ určuje nekonečnou nekomutativní grupu.
14. Ukažte, že $A_4 = \langle x, y | x^3 = y^3 = (xy)^2 = 1 \rangle$.
15. $*$ Ukažte, že $\mathbb{Q} = \langle x_1, x_2, \dots | x_n^n = x_{n-1}, n \geq 2 \rangle$
16. Buď p, q různá prvočísla a G nekomutativní grupa řádu pq. Najděte nějakou prezentaci grupy G.

Hinty:

Obecně (pro konečnou grupu G): Najděte generátory G splňující zadané relace a ukažte, že množina slov na generátorech má s danými relacemi nejvýše $|G|$ různých prvků.

4. Je to S_3. Jaké prvky mají řád 2?
7. Použijte prezentace dvou grup tvořící direktní součin. Jaké relace navíc tam musíte přidat?
8. Je to *abelovská* grupa.
10. Zkuste zobecnit prezentaci z příkladu 4. Transpozice jsou fajn!
11. Zvolte jako generátory všechny prvky grupy. Jaká množina relací určitě pokryje všechno?
12. Zkuste úpravami dostat $x = y = 1$.
15. Zobrazení $\phi(x_n) = \frac{1}{n!}$
16. Uvažte některý příslušný semidirektní součin.