Úvod do teorie grup: Cvičení 10

6. prosince 2021

1. Najděte všechny abelovské grupy řádu a) 15, b) 3^4, c) 100.
2. Buď G abelovská grupa. Ukažte, že $tG \leq G$ a G/tG je beztorzní.
3. Popište prvky $t\mathbb{C}^*$. Rozmyslete si, že $t\mathbb{C}^* \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
4. Pro všechna prvočísla p spočtěte p-komponenty v $\mathbb{Z}_{54} \oplus \mathbb{Z}_{30}$.
5. Pro prvočíslo p označme $\mathbb{Z}(p^\infty)$ Prüferovu p-grupu.
   (a) Ukažte, že $\mathbb{Z}(p^\infty)$ je abelovská a není konečně generovaná.
   (b) Ukažte, že $\mathbb{Z}(p^\infty)$ je Sylowova p-podgrupa $t\mathbb{C}^*$.
6. Buď G abelovská grupa. Potom množina nenulových prvků $a_1, \ldots, a_n \in G$ je nezávislá množina právě tehdy, když $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \simeq \bigoplus \langle a_i \rangle$.
7. Buď H konečně generovaná podgrupa grupy $\mathbb{Q}$. Pak $H \simeq \mathbb{Z}$ je cyklická.

Definice. *Abelovská grupa G se nazývá* divisibilní*, pokud každé prvek $x \in G$ je dělitelný všemi celými čísly $n \geq 2$, tj. pro všechna $n \geq 2$ existuje $g_n \in G$ splňující $ng_n = x$.*

8. O následujících grupách rozhodněte, zda jsou či nejsou divisibilní: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}(p^\infty)$, $\mathbb{Z}_n$, $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{R}^*$.
9. Ukažte, že abelovská grupa G je divisibilní, právě tehdy když pro všechna přirozená n platí $nG = G$.

Další příklady:

10. Najděte neabelovskou grupu G takovou, že množina tG všech jejích prvků konečného řádu *není* podgrupa.
11. (a) Určete všechny podgrupy $\mathbb{Z}(p^\infty)$.
    (b) Ukažte, že $\mathbb{Z}(p^\infty)$ je *nerozložitelná* (nejde zapsat jako direktní součet netriviálních podgrup).
    (c) * Ukažte, že $\mathbb{Z}(p^\infty) \simeq \langle x_1, x_2, \ldots \rangle / \langle px_1, px_2 - x_1, px_3 - x_2, \ldots \rangle$.
12. Ukažte, že každá beztorzní divisibilní grupa je vektorovým prostorem nad $\mathbb{Q}$.

∗ 13. Abelovskou grupu G nazveme *injektivní*, pokud pro libovolnou jinou abelovskou grupu B, podgrupu $A \leq B$ a homomorfismus $f : A \to G$ platí, že f jde rozšířit na homomorfismus $\varphi : B \to G$ tak, že $f = \varphi \circ i$, kde i je vnoření A do B. Dokažte, že injektivní grupy jsou právě divisibilní.

∗ 14. Určete množinu $tGL_n(\mathbb{C})$.

Hinty:
3. K popisu prvků i izomorfismu se může hodit uvažovat komplexní exponenciálu.
5(a). Jak při konečné generovanosti vypadají jmenovatelé zlomku v exponentu?
6. Vyjděte z definic.
7. Popište pomocí jmenovatelů generátorů prvky H a pak najděte vhodný izomorfismus.
10. Funguje např. faktor volné grupy, který zajistí, aby generátory měly konečný řád ale nekomutovaly.
12. Ukažte, že prvek g_n z definice divisibility je tady jednoznačně určen. Z toho VP zkonstruujte.
13. Pro jednu implikaci uvažujte grupu $\mathbb{Z}$ a vhodnou podgrupu. Pro druhou se hodí Zornovo lemma.
14. Jordanův kanonický tvar.