Úvod do teorie grup: Cvičení 1

4. října 2021

1. Popiš všechny podgrupy a urči řády všech prvků v cyklické grupě $\mathbb{Z}_{30}$.
2. Najdi generátory cyklických podgrup $\langle 60\rangle \cap \langle 18\rangle$ a $\langle 60, 18\rangle$
   a) grupy $\mathbb{Z}$,
   b) grupy $\mathbb{Z}_{90}$.
3. Buď G grupa taková, že $|G| = p$ pro prvočíslo p. Dokaž, že G je cyklická (a tedy nutně izomorfní $\mathbb{Z}_p$).
4. Nahlédni, že pro libovolné těleso T je $SL_n(T) \trianglelefteq GL_n(T)$.
5. a) Dokaž, že každá grupa řádu 4 je izomorfní buď $\mathbb{Z}_4$, nebo Kleinově grupě $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
   b) Dokaž, že všechny grupy řádu nanejvýš 5 jsou abelovské.
6. Nechť v grupě G je $H \leq G$ a $[G : H] = 2$. Ukaž, že H je normální podgrupa.

Další příklady:

7. Buď T těleso a $a \in T$. V závislosti na a a T urči řád prvku $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ v $GL_2(T)$.
8. Jsou grupy $(\mathbb{Q}, +)$ a $\mathbb{Q}^* = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ konečně generované?
9. Ukaž, že grupa $\mathbb{C}^*$ obsahuje prvek řádu n pro všechna přirozená n.
10. Buď X množina. Urči, se kterými z operací $\cap$, $\cup$, $\triangle$ ($\triangle$ značí symetrickou diferenci) může potenční množina $\mathcal{P}(X)$ tvořit grupu. Co je v takovém případě jednotkový prvek/inverz?
11. Dokaž, že pro všechna přirozená n je $A_n \trianglelefteq S_n$.
12. Nahlédni, že všechny podgrupy grupy kvaternionů Q jsou normální.
13. V grupě G uvažujme podgrupu H s indexem $[G : H] = 2$. Dokaž, že pro každé $a \in G$ platí $a^2 \in H$.

$*$ 14. Buď p prvočíslo. Dokaž, že grupa řádu p^n je cyklická právě tehdy, když je abelovská a obsahuje právě jednu podgrupu řádu p.

15. Buď H, K podgrupy grupy G. Dokaž, že množina HK tvoří podgrupu právě tehdy, když $HK = KH$. Speciálně ukaž, že pokud je alespoň jedna z H, K normální v G, tak je HK podgrupa.
16. Ukaž, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:
    a) G je abelovská grupa,
    b) zobrazení $\varphi : G \times G \to G$, $(x, y) \to x \cdot y$ je homomorfismus,
    c) zobrazení $\varphi : G \to G$, $x \to x \cdot x$ je homomorfismus,
    d) zobrazení $\varphi : G \to G$, $x \to x^{-1}$ je homomorfismus.

$*$ 17. V dihedrální grupě D_{2n} popiš všechny její podgrupy a urči, které jsou normální.

Hinty:
6. Uvažuj rozkladové třídy.
11.,12. Použij 6.
14. Uvažuj prvek největšího řádu a podgrupu jím generovanou.