GRUPY 20.12.

F volná nad $X = \{x, y, z, \dots\}$

$X^{-1} = \{x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}, \dots\}$

$\boxed{x \cdot y \cdot x^{-1} z z x}\boxed{x^{-1} y}$ $\qquad [u]_\sim \cdot [v]_\sim = [uv]_\sim$.

$W = W_X$ = všechny slova.

$\sim$ ekvivalence .. krácení sousedů $x x^{-1}$.

· Redukované slovo … $x_1 \dots x_n$, $\quad x_{i+1} \neq x_i^{-1}$.

S.4. $\forall$ třída $\sim$ obs. $!1$ redukované slovo,

Věta 5.5 Grupa $W_X/_\sim$ je volná grupa s bází $\{[x] \mid x \in X\}$.

Ekviv., množina všech red. slov F s operací

$u \cdot v = u'v'$, kde $u = u'w$, $v = w^{-1}v'$ & $u'v'$ je redukované.

u^{-1} … $(x_1 \dots x_n)^{-1} = x_n^{-1} \dots x_1^{-1}$

1 … prázdné slovo,

je volná grupa s bází X.

Dk. $f: X \to G$.

Def. $\varphi: W_X/_\sim \longrightarrow G$

$[x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}] \longmapsto f(x_1)^{\varepsilon_1} \dots f(x_n)^{\varepsilon_n}$

$x_i \in X$

$\varepsilon_i = \pm 1$

Dobře def.? Pokud $u \sim v$, pak se liší o $x x^{-1}$, což hodnotu φ neovlivní.

Zřejmě: $\varphi([u][v]) = \varphi([u])\,\varphi([v])$

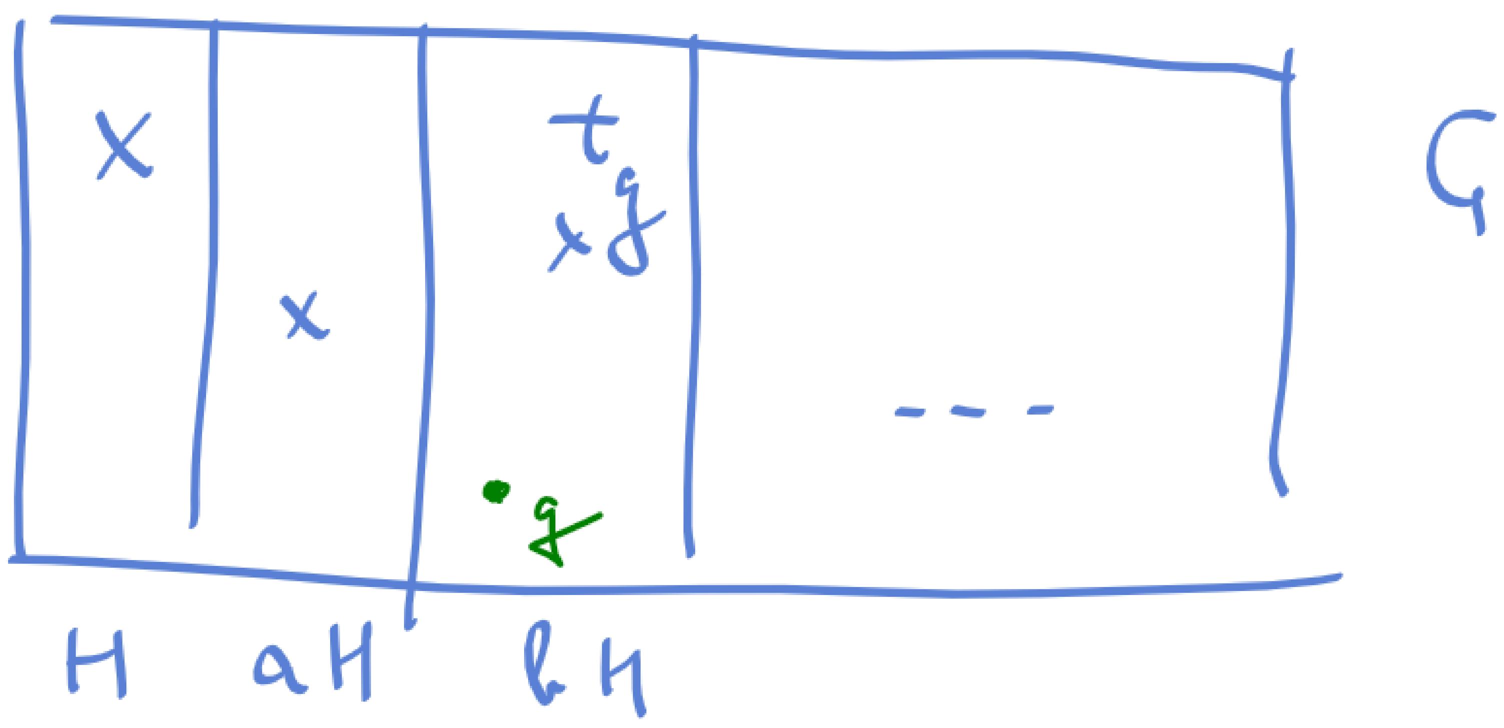
S.4: red. slova F jsou v bij. s $W_X/_\sim$ & ověří se operace.

GENERÁTORY PODGRUP

Znám gener. nějaké grupy G & mám $H \leq G$.

Chci: generátory H!

Def. $H \leq G$. $T \subseteq G$ je (levá) transverzála podgr. H, pokud
i) $t_1 H = t_2 H$ pro $t_1, t_2 \in T$, pak $t_1 = t_2$
ii) $\bigcup_{t \in T} tH = G$.



Částečné transverzále ... platí jenom i).

Často je užitečné: $1 \in T$.

Značení: pro $g \in G$ je $t_g = t(g) \in T$ je jednoznačný prvek t.ž. $t_g H = gH$ (neboli $t_g \in gH$).
$[t_g] = [g]$

Pozor. 1) $\forall x, y \in G$: $[x\, t(y)] = [t(xy)]$

Dk. $x \underline{t(y) H} = (xy)H = t(xy)H$.

2) $t_{xy}^{-1}\, x\, t_y \in H$ & $t_{xy}^{-1}\, x\, t_y = 1 \iff x t_y \in T$.

$\Updownarrow$

$x t_y = t_{xy}$

3) $(t_{xy}^{-1}\, x\, t_y)^{-1} = t_y^{-1}\, x^{-1}\, t_{xy}$, čili prvek stejného tvaru, ale s $x' = x^{-1}$, $y' = xy$.

Věta 5.6 Ať $H \leq G = \langle X \rangle$, T transv. & $1 \in T$.
Pak H je gener. mn. $Y = \{ t_{xt}^{-1}\, x\, t \mid x \in X, t \in T, xt \notin T \}$.

Navíc $xt \notin T \iff x^{-1} t_{xt} \notin T$.

& $Y^{\pm 1} = Y \cup Y^{-1} = \{ t_{xt}^{-1}\, x\, t \mid x \in X^{\pm 1}, t \in T, xt \notin T \}$
$X^{\pm 1} = X \cup X^{-1}$

Pozor! Klidně může být $X \cap X^{-1} \neq \emptyset$.

Dk. $Y = \{ \underbrace{t_{xt}^{-1} x t}_{\in H} \mid x \in X,\ t \in T,\ xt \notin T \}$.

OK.

Ať $h = x_n \cdots x_1 \in H$, $x_i \in X^{\pm 1}$.

Buď $t_0 = 1$, $t_i = t(x_i \cdots x_1)$

- $x_n \cdots x_1 \in H \Rightarrow t_n = t(x_n \cdots x_1) = 1$.
- $h = (t_n^{-1} x_n t_{n-1}) \cdot (t_{n-1}^{-1} x_{n-1} t_{n-2}) \cdots (t_1^{-1} x_1 t_0)$.

  $t_i^{-1} x_i t_{i-1} = \boxed{t_{xy}^{-1}\, x\, t_y \in Y^{\pm 1}}$ pro $x = x_i \in X^{\pm 1}$, $y = x_{i-1} \cdots x_1$

  $t = t_y$ & $t_{xy} = t(x t(y))$

- čili Y generuje H.
- takovýto prvek $= 1$ (čili nepomůže v gener.) $\iff xt \in T$ (podle pozor.).

Důsl. 5.7 Buď G kon. gen. gr. & $H \le G$ podgrupa konečného indexu. Pak H je taky kon. gen. s $\le |X| \cdot |T|$ generátory.

Dk. X jde brát konečné, bo G kon. gen.
T je kon., bo $|T| = [G : H]$. } jasné z v. 5.6.

Př. • F 2-gener. volná gr., s bází $\{a, b\}$.
$H \le F$ generované prvky $ab, a^2b^2, a^3b^3, \ldots$
$\Rightarrow H$ není kon. gen. (ale H je volná). (Cv.)

• Klasifikace kon. gen. ab. gr. $\Rightarrow$ každá jejich podgr. je taky kon. gen.

PODGRUPA VOLNÉ GRUPY JE VOLNÁ

Věta 5.8: – ______ ___ ____ _____ _____ -

- Berme $F =$ volná grupa nad X
  $=$ mn. redukovaných slov

Def. (Částečná) transverz. T podgrupy $H \leq F$ je SCHREIEROVA, pokud $\forall$ redukované slovo $vw \in T$, kde v, w jsou redukované, máme $w \in T$.

Př. $x, y \in X$. Pokud $x y x^{-2} y \in T$, pak
$y x^{-2} y$, $x^{-2} y$, $x^{-1} y$, y, $1 \in T$.

L.5.9 $\forall H \leq F$ ex. (aspoň 1) Schreierova transv.

Dk. Zornovo l.:
$\mathcal{M} = \{$ částečné Schr. transv. $\}$, uspořádané inkluzí.
$\{1\} \in \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M} \neq \emptyset$.
Sjednocení řetězce ✓
$\Rightarrow \exists$ část. Schr. transv. T, maxim. vůči $\subseteq$.
Pro spor, ať $\bigcup tH \neq G$
bud' w nejkratší red. slovo t.ž. $w \notin \bigcup tH$.
$w = xv$ pro $x \in X^{\pm 1}$, v red. slovo.
w nejkr. $\Rightarrow v \in \bigcup tH \Rightarrow vH = tH$ pro nějaký $t \in T$.
Chcem přidat xt k T.
Máme $xtH = wH$; kdyby t začínalo x^{-1}, pak $xt \in T$
(to $t = x^{-1}t'$. $xt = t' \in T$
T je koncový úsek T)
$\Rightarrow w \in xtH \subseteq \bigcup t'H$, spor.
Tedy $xt \notin T$ & $T \cup \{xt\}$ je delší část. Schr. transv.

T.5.10 F volná gr. nad X, $H \leq F$, T Schr. transv.

Pak $Y = \{ t_{xt}^{-1} x t \mid x \in X,\ t \in T,\ xt \notin T \}$ je volná báze gr. H.

& každé slovo $t_{xt}^{-1} x t$ je redukované.

Dk. 5.6 $\Rightarrow H = \langle Y \rangle$.

$xt \notin T \Rightarrow t$ nekončí písmenem x^{-1} (díky Schr.!)

Taky: $x^{-1} t_{xt} \notin T \Rightarrow t_{xt}$ nekončí x.

Ve slově $t_{xt}^{-1} x t$ se nemá co zkrátit $\Rightarrow$ je red.

L.5.11 Ať $H = \langle Y \rangle$ & platí:

$\forall y_i \in Y^{\pm 1}$, $y_i \neq y_{i+1}^{-1}$ $\forall i$: máme $y_1 \cdots y_n \neq 1$. $(*)$

Pak Y je volná báze gr. H.

Dk. $F(Y)$ = volná grupa redukovaných slov nad Y.

$\varphi : F(Y) \to H$ hom. t.ž. $\varphi(y) = y$ $\forall y \in Y$.

φ je na díky $H = \langle Y \rangle$.

φ je prosté, bo netriv. $y_1 \cdots y_n \in \operatorname{Ker} \varphi$ je zakázané $(*)$.

Stačí tedy ověřit, že součin prvků tvaru $t_{xt}^{-1} x t$, $x \in X^{\pm 1}$ není 1.

Uvažme $x, z \in X^{\pm 1}$, $s, t \in T$, $t_{xt}^{-1}\, x\, t \cdot t_{zs}^{-1}\, z\, s$.

Búno $\ell(t_{zs}) \geq \ell(t)$, tj. po zkrácení zbude nic z t_{zs}.

Víme: $xt \notin T \Rightarrow$ zkrácení nemůže smazat to x

(to pak by xt byl konec slova $t_{zs} \Rightarrow xt \in T$)

s výjimkou toho, kdy $t = t_{zs}$ & $z = x^{-1}$

No ale pak celé $t_{xt}^{-1} x t\, t_{zs}^{-1} z s = 1$.

$\Rightarrow$ v obecném součinu $t(x_n t_n)^{-1} \boxed{x_n} t_n \cdots t(x_1 t_1)^{-1} \boxed{x_1} t_1$

vždy vydrží $x_n, \ldots, x_1 \Rightarrow$ součin $\neq 1$.