GRUPY 15. 11. 2021

V.2.18. Klasifikace $|G| \le 12$.

Dk. $|G| = 8$. G neabel. $\Rightarrow$ $\nexists$ a řádu 8.

$\Rightarrow$ $\exists\, a,\ \mathrm{ord}(a) = 4$.

$\langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}_4$
$\trianglelefteq G$ (bo index 2)

$b \notin \langle a \rangle$. $\Rightarrow$ $b^2 \in \langle a \rangle$.

$G = \langle a, b \rangle$.

0) $b^2 = a$ ... nejde, bo pak ord $b = 8$.
$b^2 = a^3$ X.

1) $b^2 = 1$. Pak $G \simeq \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_2$

Snadno rozebere: 2 možnosti: triviální ... $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ... abel.
netriv. D_8.

2) $b^2 = a^2$. $bab^{-1} \in \langle a \rangle$ (bo normální)
jaký pak to je?
$\mathrm{ord}(bab^{-1}) = \mathrm{ord}(a) = 4$

$\Rightarrow$ $bab^{-1} = \begin{cases} a & \text{.... pak } ba = ab \text{ \& } G \text{ abel.} \\ a^3 \end{cases}$

$G = \langle a, b \rangle.\ a^4 = 1,\ b^2 = a^2,\ ba = a^3 b$. ← „presentace"

Cv. Tohle stačí k jednozn. určení multipl. tab. v grupě.
Tato grupa je pak izomorfní s Q_8.
$a \mapsto i,\quad b \mapsto j$.

$|G| = 12$. G neab. $|G| = 12$ ... dělitelé $1, 2, 3, 4, 6, 12$.

$\#$ 3-Syl $\equiv 1 \bmod 3$, $\mid 12$ $\Rightarrow$ $\#$ 3-Syl $= 1, 4$.

1) $\#$ 3-Syl $= 1$. $S_3 \trianglelefteq G$. $|S_3| = 3$. $S_3 \simeq \mathbb{Z}_3$. Ověří se, že máme semidir. rozkl.
S_2 nějaká 2-Syl. $|S_2| = 4$.

$\Rightarrow$ $G \simeq S_3 \rtimes S_2 \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2^2 \simeq D_{12} \\ \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_4 \text{ .... jediný netriv., X v tab.} \end{cases}$

$X = \langle a, b \rangle.\ a^6 = 1,\ b^2 = a^3 = (ab)^2$

2) $\#$ 3-Syl. $= 4$. Pak máme $\ge 4 \cdot 2$ prvky řádu 3.
$\Rightarrow$ ≤ 3 prvky řádu 2, 4 $\Rightarrow$ $\#$ 2-Syl $= 1$. $\Rightarrow$ $S_2 \trianglelefteq G$. $\Rightarrow$

$G \simeq S_2 \rtimes S_3 \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_3 \text{ triv.} \\ \mathbb{Z}_2^2 \rtimes \mathbb{Z}_3 \simeq A_{12}. \end{cases}$

$\square$

Věta 2.19 („delší" Sylowova věta). $|G|=n$, p prvoč. $H<G$, $|H|=p^k$ pro $k\geq 0$, ať $p^{k+1} \mid n$. Pak ex. $K \leq G$ t.ž. $|K|=p^{k+1}$ a $H \trianglelefteq K$.
Dk. časem, bo se v něm hodí ŘADY.

$\cdot\, G$

$\cdot\, K \quad p^{k+1}$
$\triangledown$
$\cdot\, H \quad p^k$

3. ŘADY

SUBNORMÁLNÍ ŘADY

G grupa.

Def. Subnorm. řada $G_n = 1 \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$.
(povolujeme $G_i = G_{i+1}$)
Pokud navíc $G_i \trianglelefteq G$ pro $\forall i$, pak jde o normální řadu.
Alg: G je řešitelná, pokud $\exists$ norm. řada s abel. faktory G_i/G_{i+1}.
Na co to je? Řešit. … odpovídá řešitelnosti polynomů.
- Pro kon. gr. umožňuje dk. věci indukcí:
  - první krok pro faktory G_i/G_{i+1} … budeme moct brát jednoduché!
  - ind. krok … co se děje při skládání dohromady.

Def. Zjemnění řady $H_m = 1 \trianglelefteq H_{m-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_0 = G$
t.ž. $G_n, \dots, G_0$ je podposloupnost $H_m, \dots, H_0$.
Kompoziční řada je subnormální řada t.ž. G_i/G_{i+1} je jednod.
Připomenu: A je jednoduchá gr., pokud nemá $1 \neq B \ntrianglelefteq A$
& $A \neq 1$.

- Ať $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$, G_i/G_{i+1} jedn.
  $\mathbb{D}_H$ $\triangledown$
  2. v. o izom. (& důsl.): H odpovídá norm. $1 \trianglelefteq H/G_{i+1} \trianglelefteq G_i/G_{i+1}$
  $\Rightarrow G_{i+1} = H$ nebo $H = G_i$.
  mám rovnost (=)

Pozn. kompoziční řada
$(\Leftrightarrow)$ nemá zjemnění (s $G_i \neq G_{i+1}$)
$(\Leftrightarrow)$ G_{i+1} je maximální normální podgr. v G_i $\forall i$.

Pozn. $\forall$ konečná gr. má kompoziční řadu.
Nekon. gr. může, ale nemusí mít komp. řadu.
Př. $\mathbb{Z}$ nemá: $\forall$ podgr. je $k\mathbb{Z}$, ale $k\mathbb{Z}$ není jedn. $1 = G_n \ntrianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_0 = \mathbb{Z}$
$k\mathbb{Z}/1 \simeq k\mathbb{Z}$ jedn. X.

$\overset{"}{k\mathbb{Z}}$

$1 = G_n \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$ subnorm. řada.

Pozor. $|G| = \prod |G_i / G_{i+1}|$. (Lagrange: $|G_0| = |G_1| \cdot |G_0/G_1|$)

Def. Dvě řady $\begin{array}{l} 1 = G_n, \dots, G_0 = G \\ 1 = H_m, \dots, H_0 = G \end{array}$ jsou ekvivalentní/isomorfní, pokud $n = m$ & existuje permutace $\pi \in S_n$ t. ž. $G_i / G_{i+1} \cong H_{\pi(i)} / H_{\pi(i)+1}$

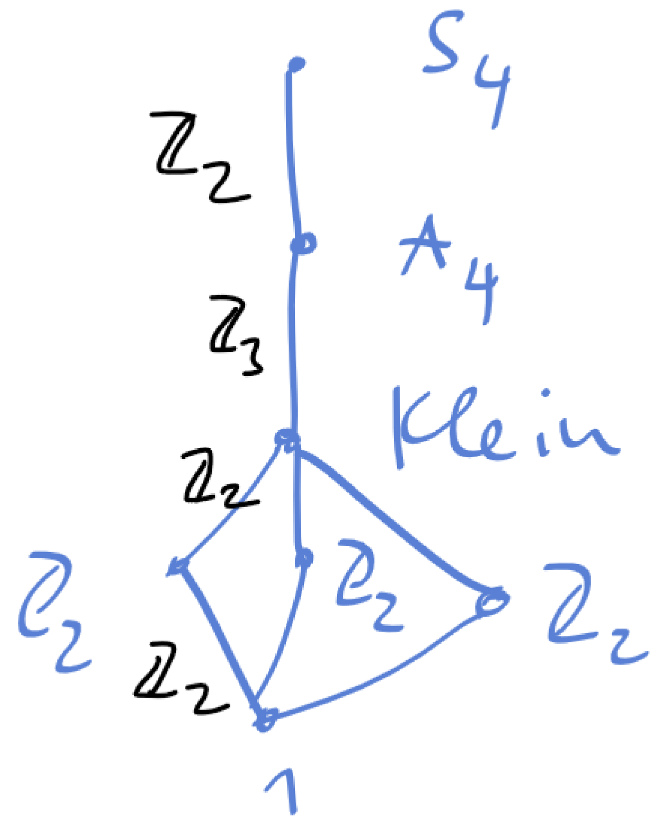
$$1 = \underbrace{G_3 \trianglelefteq G_2}_{} \trianglelefteq \underbrace{G_1 \trianglelefteq G_0}_{} = G$$

$$1 = \underbrace{H_3 \trianglelefteq H_2}_{} \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_0 = G.$$

Věta 3.1 (Jordan–Hölderova věta). Každé dvě kompoziční řady jsou ekvivalentní.

Dk. bude.

Př. S_4.



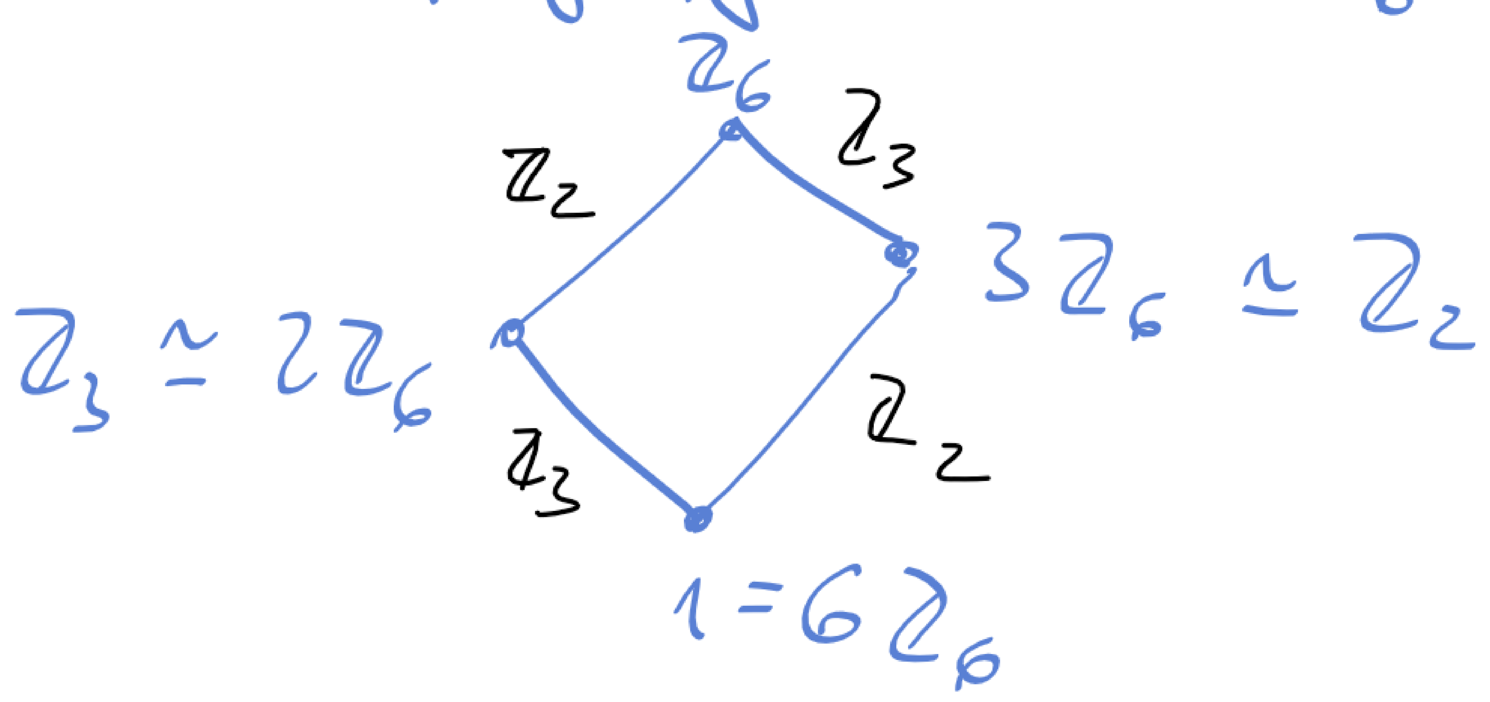
Klein $= \{id, (12)(34), (13)(24), \dots\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Subnorm. $\left.\begin{array}{l} 1 \trianglelefteq S_4 \\ 1 \trianglelefteq \text{Klein} \trianglelefteq S_4 \end{array}\right\}$ (norm.)

$1 \trianglelefteq \mathbb{Z}_2 \leq S_4$ je špatně, to $\mathbb{Z}_2 \ntrianglelefteq S_4$

$\boxed{\text{Kompoz.}}$ $1 \trianglelefteq \mathbb{Z}_2 \trianglelefteq \text{Klein} \trianglelefteq A_4 \trianglelefteq S_4$. příp. faktorgrupy $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ jsou jednod.

Př. $\mathbb{Z}_6$. podgrupy jsou $d\mathbb{Z}_6$ pro $d \mid 6$. (tvrzení z Alg.)

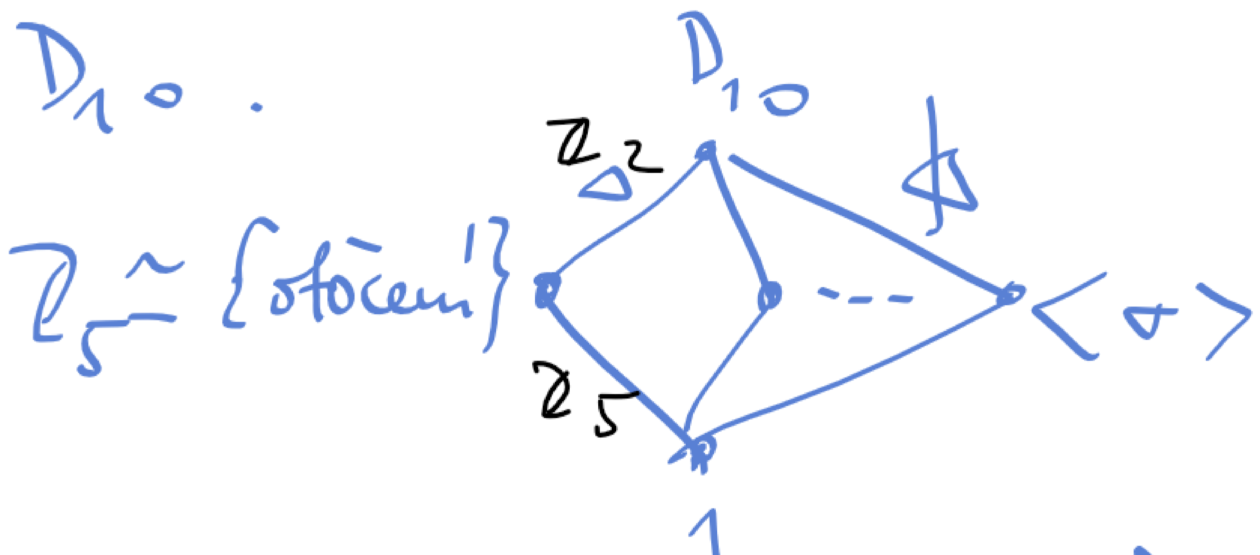


Mám 2 kompoz. řady

$1 \trianglelefteq 3\mathbb{Z}_6 \trianglelefteq \mathbb{Z}_6$

$1 \trianglelefteq 2\mathbb{Z}_6 \trianglelefteq \mathbb{Z}_6$

Př. D_{10}.

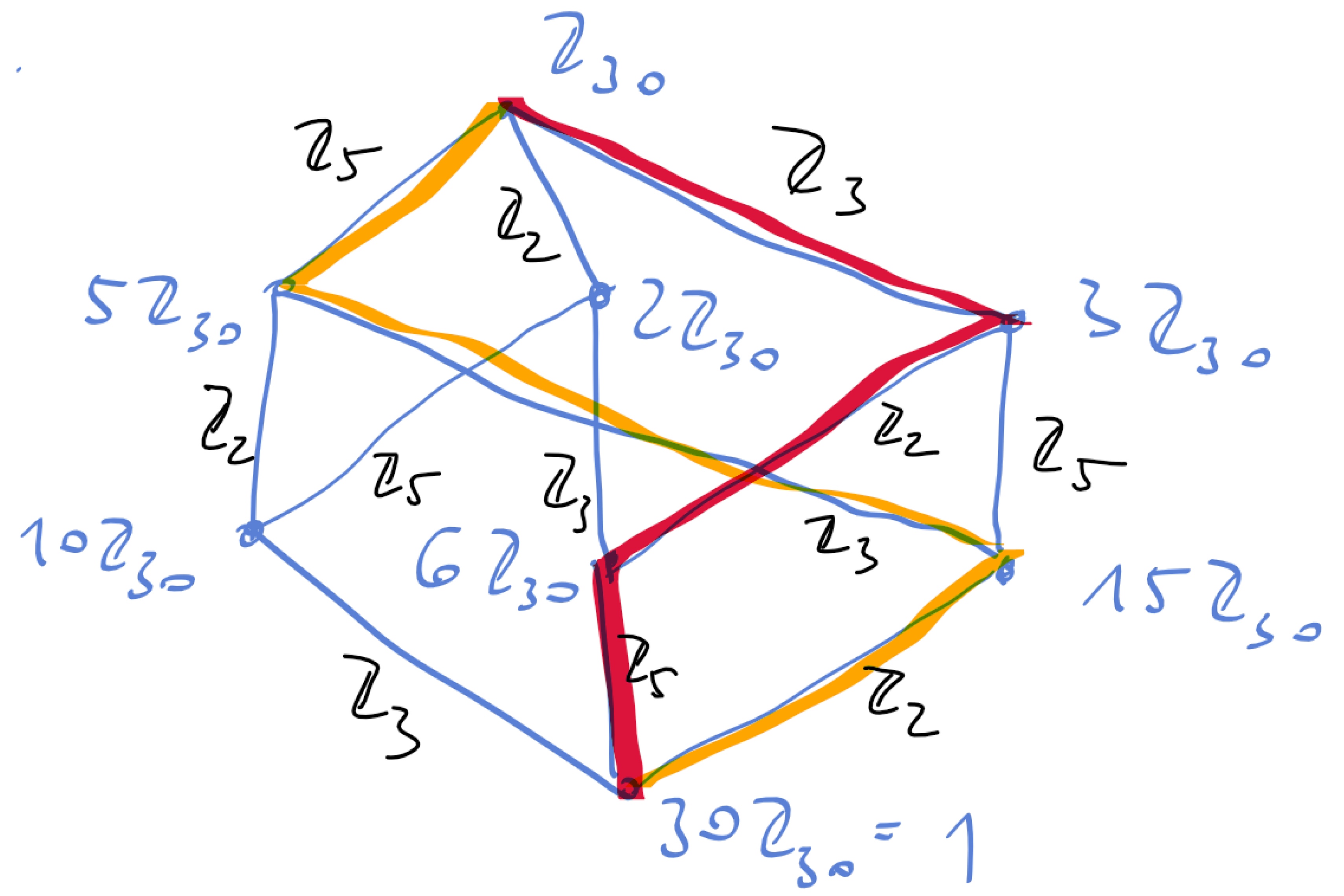


pro různé zrcadlení σ.

$\langle \sigma \rangle \ntrianglelefteq D_{10}$.

Jen 1 komp. řada $1 \trianglelefteq \{\text{ot.}\} \trianglelefteq D_{10}$.

Př. $\mathbb{Z}_{30}$.



$1 \trianglelefteq 6\mathbb{Z}_{30} \trianglelefteq 3\mathbb{Z}_{30} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{30}$

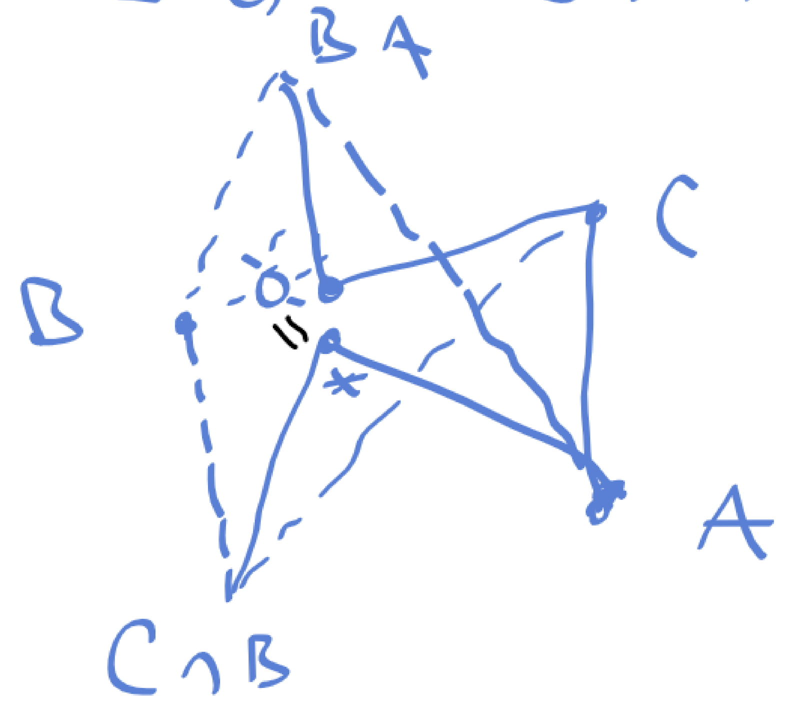
$1 \trianglelefteq 15\mathbb{Z}_{30} \trianglelefteq 5\mathbb{Z}_{30} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{30}$

Př. kon. p-grupa. Věta 2.13 (nedokázané) dává, že všechny faktory jsou $\simeq \mathbb{Z}_p$.

ZASSENHAUSOVO LEMMA

T.3.2 (modularita podgrup). $A, B, C \le G$ t.ž. $A \le C$.
Pak $(C \cap B)A = C \cap (BA)$

$\ast \quad = \quad ☼$



Pozn. nepředpokládám normalitu, takže to nemusí být podgr.!
Ale pokud $A \trianglelefteq G$, pak to jsou podgrupy.

Pozn. Všechny normální podgr. G tvoří svaz.
Svaz = část. uspoř. mn., kde existují suprema $\vee$ a infima $\wedge$ dvojic prvků.

Pro norm. podgr. $A \vee B = AB$, $A \wedge B = A \cap B$.
Modulární vlastnost ve svazu je $(C \wedge B) \vee A = C \wedge (B \vee A)$.

Dk. 3.2: $(C \cap B)A = C \cap (BA)$

$\subseteq$. $x = ba \in (C \cap B)A$, $b \in C \cap B$, $a \in A$

$\Rightarrow x \in BA$

$b \in C$, $a \in A \subseteq C \Rightarrow x = ba \in C$

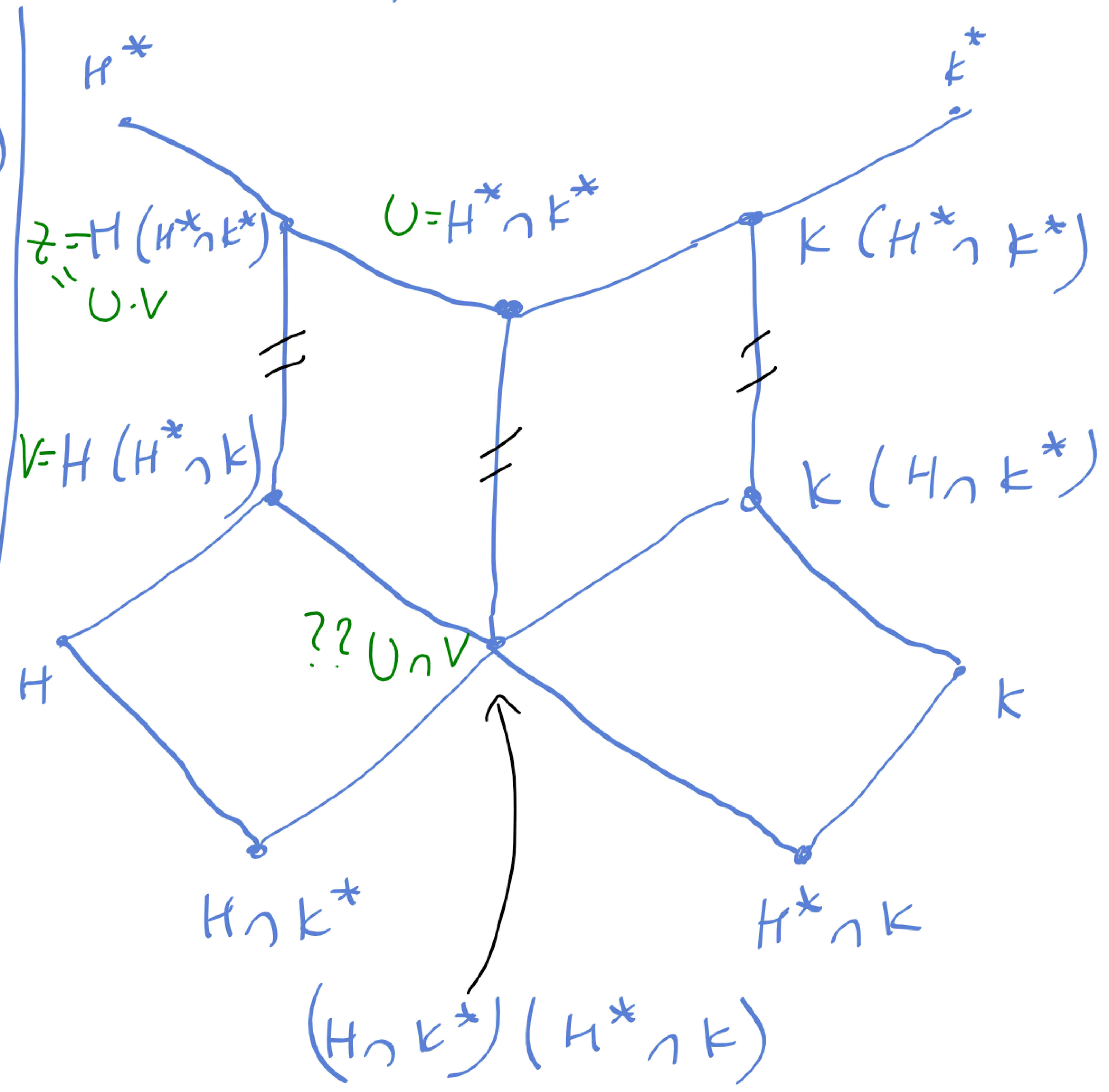
$\supseteq$ Ať $y = ba \in C \cap BA$, $b \in B$, $a \in A \subseteq C$.

$\Rightarrow b = \underbrace{y}_{\in C}\underbrace{a^{-1}}_{\in C} \in C$ $\square$

V.3.3 (Zassenhausova lemma) Ať $H \trianglelefteq H^* \leq G$, $K \trianglelefteq K^* \leq G$. Pak

a) $H(H^* \cap K) \trianglelefteq H(H^* \cap K^*)$
$K(K^* \cap H) \trianglelefteq K(K^* \cap H^*)$

b) faktory jsou izomorfní.



Pozor. i) $U \trianglelefteq U^* \Rightarrow U \cap V \trianglelefteq U^* \cap V$.
Ať $u \in U \cap V$, $x \in U^* \cap V$.
Chci $x u x^{-1} \in U \cap V$.
$x u x^{-1} \in U$, bo $U \trianglelefteq U^*$
$\in V$, bo $u, x \in V$

ii) $U \trianglelefteq U^* \leq Z$, $V \trianglelefteq Z \Rightarrow$
$VU \trianglelefteq VU^*$

iii) $U, V \trianglelefteq W \Rightarrow UV \trianglelefteq W$

CV

Dk. 3.3 a) Normalita vlevo:
i) $\Rightarrow$ $H^* \cap K \trianglelefteq H^* \cap K^*$
ii) (pro $Z = H^*$) $\Rightarrow$ $H(H^* \cap K) \trianglelefteq H(H^* \cap K^*)$

Norm. uprostřed. $H \cap K^* \trianglelefteq H^* \cap K^*$
$H^* \cap K \trianglelefteq \ldots$ } použij iii)

Norm. vpravo symetricky.

b) 3. v. o izom. $U / U \cap V \simeq UV / V$ pro $U \leq Z$, $V \trianglelefteq Z$.

$Z = H(H^* \cap K^*) = UV$, $V = H(H^* \cap K)$, $U = H^* \cap K^*$.

$$UV/V = \underbrace{H(H^* \cap K^*) / H(H^* \cap K)}_{\text{faktor vlevo}} \simeq \underbrace{H^* \cap K^* / U \cap V}_{\text{? fakt. uprostřed ?}}$$

$$U \cap V = (\underbrace{H}_{B}\,\underbrace{(H^* \cap K)}_{A}) \cap \underbrace{(H^* \cap K^*)}_{C} \overset{3.2}{=} (\underbrace{H}_{B} \cap \underbrace{(H^* \cap K^*)}_{C}) \cdot \underbrace{(H^* \cap K)}_{A}$$

$$= (H \cap K^*) \cdot (H^* \cap K)$$

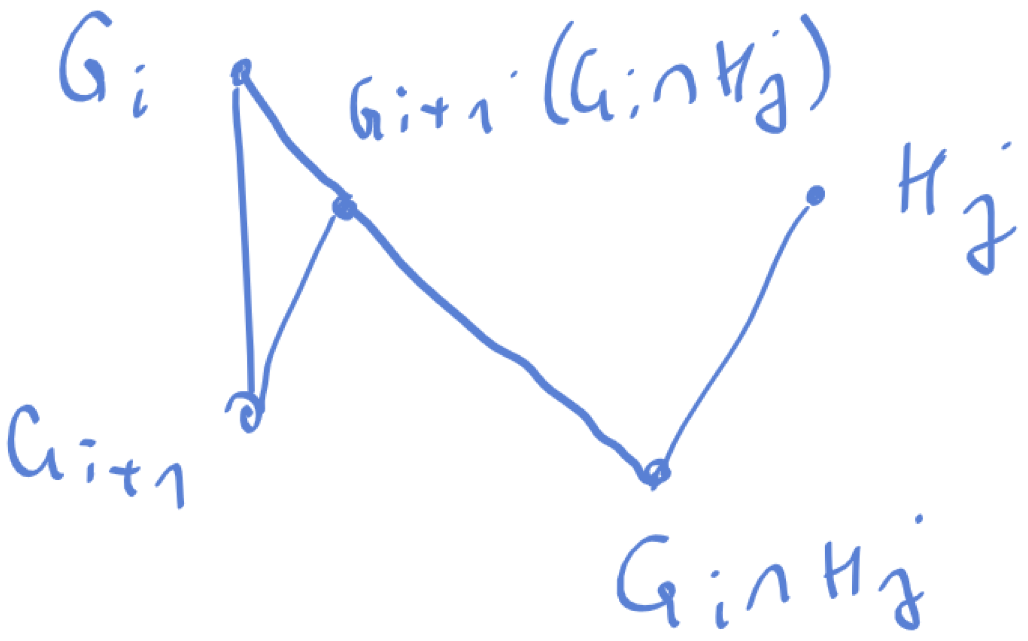
ZJEMŇOVÁNÍ ŘAD

T.3.4 Každé 2 subnorm. řady $G_n = 1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_0 = G$

$H_m = 1 \trianglelefteq \dots \ H_0 = G$

mají zjemnění $\tilde{G}_r$, $\tilde{H}_s$ $(0 \le r, s \le mn)$, které jsou ekvivalentní.

Dk. Do každého „intervalu" $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ nacpu celou řadu H_j.



Def. $G_{ij} = (G_i \cap H_j)\, G_{i+1}$

$[= G_i \cap (H_j G_{i+1})]$ z modul.

$H_{ij} = (H_j \cap G_i)\, H_{j+1}$

Zřejmě: $G_{i0} \ge G_{i1} \ge \dots \ge G_{im} = (G_i \cap \underbrace{H_m}_{=1}) \cdot G_{i+1} = G_{i+1} = G_{i+1,0} \ge G_{i+1,1}$

Stejně pro H: $H_{n,j} = H_{0,j+1} = H_{j+1}$.

Zassenhaus: $G_{i,j+1} \trianglelefteq G_{ij}$, $H_{i+1,j} \trianglelefteq H_{ij}$ & faktory jsou $\cong$.

tedy stačí očíslovat

$G_0 = G_{00} \trianglerighteq G_{01} \trianglerighteq G_{02} \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G_{0m} = G_1 = G_{10} \trianglerighteq \dots$

jako $\tilde{G}_r$

a podobně pro $\tilde{H}_s$. □

Dk. Jordan-Höldera 3.1 Ať $G_0, \dots, G_n$, $H_0, \dots, H_m$ jsou 2 kompoz. řady

$\Rightarrow$ nemají žádné zjemnění s $\tilde{G}_r \ne \tilde{G}_{r+1}$

Porovnám $G_0, \dots, G_n$ s $\tilde{G}_0, \dots, \tilde{G}_{mn}$ vidím, že v $\tilde{G}_r$ se mi $(mn - n)\times$ stane, že $\tilde{G}_r = \tilde{G}_{r+1}$.

Podobně pro H_j, $\tilde{H}_s$.

Ale $\tilde{G}_r$, $\tilde{H}_s$ jsou ekviv. $\Rightarrow$ $mn - n = mn - m$ $\Rightarrow$ $n = m$.

Vypuštěním členů s $\tilde{G}_r = \tilde{G}_{r+1}$ mám, že faktory G_i / G_{i+1} = netriv. faktory $\tilde{G}_r / \tilde{G}_{r+1} \cong \tilde{H}_s / \tilde{H}_{s+1} = H_j / H_{j+1}$ □

ZOBECNĚNÍ & Ω-GRUPY

Platí J-H i třeba pro normální řady? ANO.

	$1 \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G = G_0$	nemá zjemnění
$G_i \leq G$	subnormální řada	kompoziční řada
$G_i \trianglelefteq G$	normální ř.	hlavní ř.
G_i char G	charakteristická ř.	hlavní char. ř.
G_i úplně char. podgr. v G	úplně char. ř.	hlavní úplně char. ř.

<u>Def.</u> H je <u>charakteristická podgrupa</u> v G, pokud $\varphi(H) \subseteq H$ pro $\forall \varphi \in Aut(G)$.

Značíme: H char G, $H \leq_{char} G$

[normální: $\varphi(H) \subseteq H$ pro $\forall \varphi \in Inn(G)$, čili pro φ = konjugace]

H je <u>úplně char.</u> ... pokud $\varphi(H) \subseteq H$ $\forall \varphi \in End(G)$.

$End(G) = \{ \varphi : G \to G \text{ homom.} \}$

Ω-grupa: kromě operací $1, \cdot, ^{-1}$ mám ještě unární operace $\omega \in \Omega$ t.ž. $\omega(xy) = \omega(x)\omega(y)$. [čili $\omega : G \to G$ je hom.]

Pro Ω-gr. jde dk. vety o izom., Zassenhause, atd. stejně.

Volbou $\Omega = \emptyset$ mám obyčejné grupy.

fixuju-li grupu G a volím $\Omega = Inn(G)$, pak

Ω-podgr. = normální podgr.

& dostanu J-H (Jordan-Höldera) pro normální a hlavní řady.

Podobně pro $\Omega = Aut(G)$, $\Omega = End(G)$

[viz nepř. Drápal].

ŘEŠITELNOST A ŘADY

$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$.

$G' = \langle [a,b] \mid a,b \in G \rangle$ ... derivovaná / komutátorová podgr.

$G^{(n)} = (\underbrace{(((G')')' \cdots}_{n\times})'$

$G \trianglerighteq G' \trianglerighteq G'' \trianglerighteq \dots$ derivovaná řada.

<u>Def.</u> G je řešitelná, pokud $\exists n : G^{(n)} = 1$.

Pak je der. řada subnormální řada.

Věta 3.5 (podmínky na řešitelnost). G grupa. NTJE:

a) G je řešitelná

b) ex. normální řada s abelovskými faktory [def. z Alg]

$$1 = G_n \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$$

$$G_i \trianglelefteq G \quad \& \quad G_i / G_{i+1} \text{ je abel.}$$

c) ex subnormální řada s abel. faktory.

Je-li G konečná, navíc to je ekviv. s

d) ex. kompoziční řada s cyklickými faktory.

Lemma 3.6 a) H char K, K char G $\Rightarrow$ H char G.

b) H char K, $K \trianglelefteq G$ $\Rightarrow$ $H \trianglelefteq G$.

Dk. CV.

Pozn. $H \trianglelefteq K$, $K \trianglelefteq G$ $\not\Rightarrow$ $H \trianglelefteq G$.

T 3.7 $G^{(n)}$ char G.

Dk. $G' = G^{(1)}$. Buď $\varphi \in Aut(G)$. Chceme $\varphi(G') \subseteq G'$

Stačí $\varphi([a,b]) \in G'$.

$$\varphi(aba^{-1}b^{-1}) = \varphi(a)\varphi(b)\varphi(a)^{-1}\varphi(b)^{-1} = [\varphi(a), \varphi(b)] \in G' \checkmark$$

- $G^{(n)}$ char $G^{(n-1)}$ char $\cdots$ $G' = G^{(1)}$ char G

L. 3.6 a) $\Rightarrow$ $G^{(n)}$ char G.

Dk v. 3.5 a $\Rightarrow$ b. $G^{(i)}$ char G $\Rightarrow$ $G^{(i)} \trianglelefteq G$.

Tedy deriv. řada $1 = G^{(n)} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G$ je normální řada.

Víme (t. 1.6 b) G/G' abel.

$$\Rightarrow \quad G^{(i)} / (G^{(i)})' \quad \text{je abel.}$$

b $\Rightarrow$ c $\checkmark$

d $\Rightarrow$ c $\checkmark$

c $\Rightarrow$ d pro kon. G. $1 = G_n \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G = G_0$ subnorm. s G_i / G_{i+1} ab.

G konečná $\Rightarrow$ postupně zjemňuju, až dostanu kompoz. řadu H_j.

Zjemňovat jsem uvnitř abel. G_i / G_{i+1} $\Rightarrow$ faktory H_j / H_{j+1} jsou abel. & jednod.

CV. A abel. jedn. grupa $\Rightarrow$ $A \simeq \mathbb{Z}_p$ pro prvoč. p.

$c \Rightarrow a$. At' $1 = G_n \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$.

G_i / G_{i+1} abel.

Chci $G^{(n)} = 1$.

Indukcí podle n:

$n=1$ $\quad 1 \trianglelefteq G \Rightarrow G/1 \simeq G$ abel. $\Rightarrow G' = G^{(1)} = 1$.

n. $\quad G_0 \trianglerighteq G_1$ abel. faktor. T. 1. 6 b $\Rightarrow G' \leq G_1$.

Uvažujme $\quad 1 = G' \cap G_n \leq G' \cap G_{n-1} \leq \cdots \leq G' = G' \cap G_1$ (*)

3. v. o izom.: $\quad G' \cap G_i / \underbrace{G' \cap G_{i+1}}_{\substack{= (G' \cap G_i) \cap G_{i+1} \\ \text{je normální}}} \simeq \underbrace{G_{i+1}(G_i \cap G') / G_{i+1}}_{\text{je podgrupa abel. gr.}} \leq G_i / G_{i+1}$

$\Rightarrow$ (*) je subnormální řada s abel. faktory délky $n-1$.

Podle IP: $(G')^{(n-1)} = 1$. $\square$

(Může se stát, dřív, že $G^{(1)} = 1$)

T. 3. 8 a) G řeš., $H \leq G \Rightarrow H$ řeš.

b) G řeš., $N \trianglelefteq G \Rightarrow G/N$ řeš.

c) $N \trianglelefteq G$, N řeš., G/N řeš. $\Rightarrow G$ řeš.

d) G, H řeš. $\Rightarrow G \times H$ řeš.

Dk. CV / viz Alg.