

# ALGEBRA 14.5.

- $G \triangleright N$  ( $ana^{-1} \in N \quad \forall a \in G, n \in N$ )
- $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in N$
- Třídý ... rozložené t.j.  $[a] = aN = Na$
- $G/N$  ...  $[a][b] = [ab], [a]^{-1} = [a^{-1}], [1]$   
faktorgrupa.

V. 19.4  $\varphi: G \rightarrow H$  hom.

1) (v. o hom.)  $N \leq \text{Ker } \varphi, N \trianglelefteq G \Rightarrow$   
hom.  $\psi: G/N \rightarrow H, [a] \mapsto \varphi(a)$  ✓

2) (1. věta o isom.)  $G/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi.$

Dl. Použijte 1) pro  $N = \text{Ker } \varphi. \quad \psi: G/\text{Ker } \varphi \rightarrow H$

•  $\psi$  proutě:  $[a] = [b] \Leftrightarrow ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \varphi(ab^{-1}) = 1$   
 $\Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow \psi([a]) = \psi([b])$   
 $\psi([a]) = \varphi(a)$

• Když  $x$  ve  $\psi$  divněm jenom jako ve soln.  $G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi \leq H,$   
tak je ve. Im  $\psi$

Hodí se ve učebnici faktorgrupa:  $G/N \cong H$  dle

Vdělání to tak, že ve jdu  $\varphi: G \rightarrow H$  t.j.  $\text{Ker } \varphi = N$

Pr.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$  ... dleme  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$  tak, aby  $\text{Ker } \varphi = n\mathbb{Z}$   
 $\rightsquigarrow a \mapsto a \text{ mod } n$

$\Rightarrow$  1. v. o isom.  $\mathbb{Z}/\text{Ker } \varphi \cong \text{Im } \varphi \dots \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$

$[a] = a + n\mathbb{Z} \mapsto a$   
 $a = 0, 1, \dots, n-1$

Pr.  $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$  [  $\varphi: S_n \rightarrow \mathbb{Z}_2$   
 $\pi \mapsto \begin{matrix} 0 \dots \text{sgn } \pi = 1 \\ 1 \dots \text{sgn } \pi = -1 \end{matrix}$  ]

Pr. T tleso.  $GL_n(T)/SL_n(T)$  [ $SL_n$  je normalni  
 $\leadsto$  vyjádřit det]

$$A \sim B \Leftrightarrow AB^{-1} \in SL_n(T) \Leftrightarrow \det(AB^{-1}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \det A = \det B.$$

Takže vedl,  $\bar{x}$  faktoriz. bude um. všech možných  
hodnot det.  $\} = T^*$

$\det = \varphi: GL_n(T) \rightarrow T^*$  je hom.  
 $A \mapsto \det A$

$\text{Im } \varphi = T^*$  (bo  $\det \begin{pmatrix} t & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} = t$ ) } 1. v. o. izom.:  
 $GL_n(T)/SL_n(T) \cong T^*$   
 $\text{Ker } \varphi = SL_n(T)$  }  
 $[A] \mapsto \det A$

V. 15.8. (Charakt. cykl. gr.  $G$  cykl.  $\Rightarrow G \cong \mathbb{Z}$  nebo  $\mathbb{Z}_n$ .)

Rychlý důkaz:  $G = \langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Uvažujme hom.  $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$  [rozmyšlet: proč nemůžeme  
 $k \mapsto a^k$  ]  
 $\left[ \begin{array}{l} \text{breit } G \rightarrow \mathbb{Z} \times \\ a^k \mapsto k \end{array} \right]$

$G$  cykl.  $\Rightarrow \text{Im } \varphi = G$ .

$\text{Ker } \varphi$  je podgrupa  $n \mathbb{Z} \Rightarrow \text{Ker } \varphi = \{n\mathbb{Z} \dots n \in \mathbb{N}\}$   
 $\{0\} = 0\mathbb{Z}$

Tedy (1. v. o. izom.)  $G = \text{Im } \varphi \cong \mathbb{Z} / \text{Ker } \varphi = \begin{cases} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n \\ \mathbb{Z}/0\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}. \end{cases}$

Lemma 19.5 (2. věta o izom.)  $N \trianglelefteq G$ .

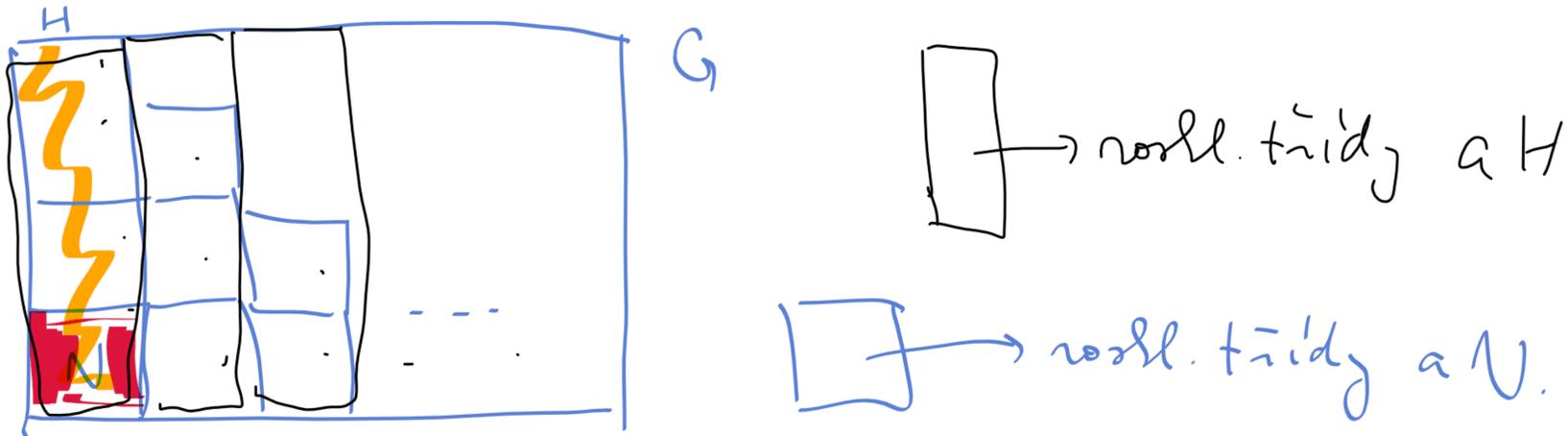
1)  $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ . Pak  $H/N$  je normalní  
podgr. v  $G/N$ .  
(čili  $H/N \trianglelefteq G/N$ )

2) Je-li  $K \trianglelefteq G/N$ , pak ex.  $H \trianglelefteq G$  t.ž.

$K = H/N$  }  $(G/N)/(H/N) \cong G/H$ .

3)  $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ . Pak

Jak vypadají  
podgrupy  $H$  v  $G/N$  ?  
-----  
Pokud  $N, H \leq G$   
a  $H \geq N$ , pak  
 $N \leq H$   
-----  
Pokud navíc  $N \trianglelefteq G$ ,  
pak  $N \trianglelefteq H$



1+2:

$$H/N \trianglelefteq G/N$$

□ obrazování  $\begin{matrix} \uparrow \\ H \end{matrix}$   $\begin{matrix} \left[ \begin{matrix} H \end{matrix} \right] \\ \uparrow \\ \square \end{matrix}$  všechny □

$$3 \quad (G/N) / (H/N) \cong G/H$$

Důl.) 1) ověřit.

2)  $K \trianglelefteq G/N \Rightarrow K = H/N$  pro nějaké  $H$ , a zice

$$H = \{ a \in G \mid [a] = aN \in K \}. \text{ Ověřit se, že } K = H/N.$$

3) Hom- $\varphi: G/N \rightarrow G/H \quad N \trianglelefteq H$   
 $aN \mapsto aH$

Je dobře def.?  $aN = bN \Leftrightarrow ab^{-1} \in N \Rightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow aH = bH$

Hom?  $\varphi(aN \cdot bN) \stackrel{?}{=} \varphi(aN) \cdot \varphi(bN) = aH \cdot bH = (ab)H$  OK.  
 $\varphi(abN) = (ab)H$  OK.

Im  $\varphi = G/H$  zřejmá

$$\text{Ker } \varphi = \{ aN \mid \varphi(aN) = aH = 1 \cdot H \}$$

$$aH = 1 \cdot H \Leftrightarrow a \cdot 1^{-1} = a \in H$$

$$\Rightarrow \text{Ker } \varphi = H/N$$

∴

T.19.6 (3. v. oisom.)  $N \trianglelefteq G, H \leq G$ . Pak  $HN = \{ hn \mid h \in H, n \in N \}$  je podgrupa  $G$

$$H \cap N \trianglelefteq H \quad \& \quad HN/N \cong H/(H \cap N)$$

# 19.3 Resitelné grupy

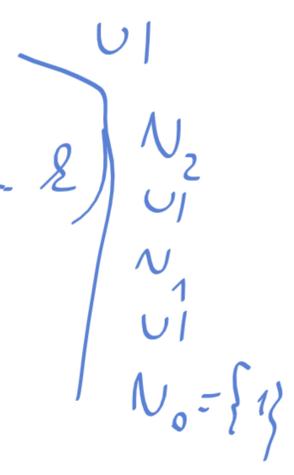
$$G = N_k$$

$$U / N_{k-1} \\ \cup \\ \vdots$$

Def. Grupa  $G$  je resitelná, pokud  $\exists k \in \mathbb{N}$  a normální podgrupy  $N_0, N_1, \dots, N_k \trianglelefteq G$  t.j.

$$\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = G \quad \text{a}$$

každá faktorgrupa  $N_i / N_{i-1}$  (pro  $i = 1, \dots, k$ ) je abelovská.



Najmenší  $k$ , pro kt. tento řetězec existuje, se nazývá stupeň resitelnosti  $G$ .

• Stupeň res.  $k=1$  ( $\Leftrightarrow$ )  $G$  abelovská ... bo:  $G \cong G / \{1\} = N_1 / N_0$

• Grupy stupně resitelnosti 2 se nazývají metabelovské.

Př.  $S_3$  je metabelovská, bo  $\{1\} \leq A_3 \leq S_3$ .

$$A_3 / \{1\} \cong A_3 \cong \mathbb{Z}_3 \quad \text{je abel.}$$

$$S_3 / A_3 \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{--- " ---}$$

podgrupa všech rotací

• Dihedrová grupa  $D_{2n}$  je metabel.  $\{1\} \leq R \leq D_{2n}$

$$R / \{1\} \cong \mathbb{Z}_n, \quad D_{2n} / R \cong \mathbb{Z}_2.$$

•  $S_4$  je resit. stupně 3:  $\{1\} \leq K_4 \leq A_4 \leq S_4$ .

$$K_4 = \text{Kleinova grupa} = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \\ \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

•  $S_n$  pro  $n \geq 5$  není resitelná, bo:

$A_n$  je jediné vlastní normální podgr. v  $S_n$  (C.V.).

ale  $\{1\} \leq A_n \leq S_n$  nefunguje, bo  $A_n$  není abel.

• Feit-Thompson:  $\forall$  grupa lichého řádu je resitelná.

•  $\forall$  grupa řádu  $p^2$  ( $p$  prvoč.) je resit.

Def.  $G$  grupa. Její derivované podgrupa je

$$G' = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G \rangle$$

[motivace:  $aba^{-1}b^{-1} = 1 \Leftrightarrow ab = ba$ ]

L. 19.7  $N \trianglelefteq G$ .

1)  $N' \trianglelefteq G$

2)  $G/N$  je abelovská  $\Leftrightarrow G' \leq N$ .

Dů. 1) ověřit  $\times$  (úž skript)

2)  $G/N$  abel.  $\Leftrightarrow [a][b] = [b][a] \quad \forall a, b \in G$

$$\Leftrightarrow [aba^{-1}b^{-1}] = [1] \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1} \in N \quad \forall a, b \in G$$

$$\Leftrightarrow G' \leq N.$$

T. 19.8 (řešitelnost podgrupa a faktorgrupa)  $G$  grupa.

1)  $G$  řešit. a  $H \leq G \Rightarrow H$  řešit.

2)  $G$  řešit,  $K \trianglelefteq G \Rightarrow G/K$  řešit.

3) Pokud  $\exists N \trianglelefteq G$  t.j.  $N$  je řešit. a  $G/N$  je řešit.,  
pak je  $G$  řešit.

Dů. 1)  $N_i \trianglelefteq G$ ,  $\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = G$ ,  $N_i/N_{i-1}$  abel.

Uvažujme  $\{1\} = N_0 \cap H \leq N_1 \cap H \leq \dots \leq N_k \cap H = H$ ,  
doležeme, že tato řada prokazuje řešitelnost  $H$ .

Chceme:  $N_i \cap H \trianglelefteq H$  OK.

$$\frac{(N_i \cap H)}{(N_{i-1} \cap H)} = \frac{(N_i \cap H)}{(N_i \cap H) \cap N_{i-1}}$$

$$\frac{HN/N \cong H/H \cap N$$

3. v. oizom.

$$\underbrace{N_{i-1} (N_i \cap H)}_{N_{i-1}} \leq N_i / N_{i-1} \dots \text{je abel.}$$

$\Rightarrow$  je abel.  $\Rightarrow N_i \cap H / N_{i-1} \cap H$  ab.  $\ddot{\smile}$

2) podobu, ale používá 2. a 3. v. oison.

3) se udělá fyz (neskončím, vis nr./prosem.)

Díl. 19.9  $G$  grupa, normální podgr.  $N_0, \dots, N_k \trianglelefteq G$

t.2.  $\{1\} = N_0 \leq N_1 \leq \dots \leq N_k = G$

a  $N_i / N_{i-1}$  je řešitelná. Pak  $G$  je řešitelná.

Dů. Indukcí podle  $k$  a použitím 19.8(3).

Odsopdu:  $N_1/N_0 \cong N_1, N_2/N_1$  řešit.  $\implies N_2$  řešit.

$N_2, N_3/N_2$  řešit.  $\implies N_3$  řešit atd.

## ČÍSELNÁ TĚLESA A KOŘENY POLYNOMŮ

### 20. Okružové hom. a faktorokruž

#### 20.1. homom.

$R, S$  okruž (ne nutně komut.)

$\varphi: R \rightarrow S$  je homom. okružie ...  $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$   $\left[ \begin{array}{l} \implies \varphi(a) = -\varphi(-a) \\ \varphi(0) = 0 \end{array} \right]$   
 $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

Obraz hom.  $\varphi$  je  $\text{Im } \varphi = \{ \varphi(a) \mid a \in R \}$   $\leftarrow$  je untr. prvek  
Jádro hom.  $\varphi$  je  $\text{Ker } \varphi = \{ a \in R \mid \varphi(a) = 0 \}$   $\leftarrow$   $(1, +, -, 0)$

Ideal  $I$  v okruž  $R$  je podmnožina  $I \subseteq R$  t.2.

$I$  je podgrupa  $(R, +, -, 0)$  [t.2.  $a+b \in I, -a \in I, 0 \in I$   
 $\forall a, b \in I$ ]

už ověno v nehozemí  $R$ , t.2.  $ra \in I \quad \forall a \in I, r \in R$

T.20.1 (obraz = jádro)  $R, S$  okruž,  $\varphi: R \rightarrow S$  hom. okružie.

1)  $\text{Im } \varphi$  je podokruž  $S$

2)  $\text{Ker } \varphi$  je idea'l v  $R$ . [ "Idea'ly mají roli normálních podgrup"

Dř. 1)  $\text{Im } \varphi$  je podokruh.

$$\{ \varphi(a) \mid a \in R \}$$

$$\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(a+b) \in \text{Im } \varphi$$

$\uparrow$   
hom

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) = \varphi(ab) \in \text{Im } \varphi \quad \checkmark$$

2)  $\text{Ker } \varphi$  je ideál.  $\text{Ker } \varphi$  je uzav. ne + OK (ověř!)  
Uzavřenost ne uvození  $R$ : Chceme:  $a \in \text{Ker } \varphi, r \in R \stackrel{?}{\Rightarrow} ra \in \text{Ker } \varphi$

$$\varphi(ra) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\parallel \quad a \in \text{Ker } \varphi$$

$$\varphi(r) \cdot \varphi(a) = \varphi(r) \cdot 0 = 0 \quad \checkmark$$

Analogicky jako v grupách platí

T. 20.2  $\varphi: R \rightarrow S$  hom. okruh<sup>o</sup> je prostý ( $\Leftrightarrow$ )  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$

T. 20.3  $\varphi: R \rightarrow S, \psi: S \rightarrow T$  hom. okruh<sup>o</sup>. Pak

1)  $\psi \circ \varphi: R \rightarrow T$  je hom. okruh<sup>o</sup>

2) Je-li  $\varphi$  bijekce (čili  $\varphi$  je izom.), pak  $\varphi^{-1}: S \rightarrow R$  je homom. okruh<sup>o</sup> (a tedy izom.)