

Zkouška z Komutativních okruhů 2019/2020

Víťa Kala

U zkoušky si každý vylosuje dvojici lehčí a těžší otázky (příčemž jsem se snažil o to, aby jednotlivé dvojice byly obtížností vyvážené). Ke zdárnému složení zkoušky je třeba pro každou z otázek písemně zformulovat definice a tvrzení a nastínit příslušný důkaz. Samozřejmě je vhodné si na začátku (a potom průběžně) ujasnit, co přesně chci slyšet, případně se mě průběžně ptát na hinty. Po cca 1 hodině se na sepsané podívám a případně si nechám ještě něco dovysvětlit nebo dopřipravit. Dýl než 2 hodiny bych jednoho člověka zkoušel opravdu nerad.

U všech otázek si představuju znalosti zhruba v rozsahu skript (+ schopnost dokázat lehčí tvrzení nechaná jako cvičení, včetně těch, jež byla za DÚ nebo na cvičeních).

Pokud se nebude dařit teorie, můžu to zkusit zachránit dotazem na příklady.

Hrubý nástin známkování:

- 1: umí všechno, případně s několika málo drobnými chybkami nebo hinty v důkaze
- 2: umí definice a formulace tvrzení a lehký nebo těžký důkaz, v látce se orientuje
- 3: umí definice a formulace tvrzení a orientuje se v nich, i když toho moc neumí dokázat
- 4: umí toho málo

1 Lehčí otázky

Věty o homomorfismu a izomorfismu

Charakterizace maximálních ideálů a prvoideálů

OHI a gaussovskost

Charakterizace noetherovských modulů

Obsah polynomu a Gaussovo lemma

Zornovo lemma a aplikace na existenci ideálů

Charakterizace celistvých prvků

Existence kořenového nadtělesa

Stupeň separability: multiplikativita a porovnání se stupněm rozšíření

Charakterizace separabilních rozšíření, separabilita v $V \supset U \supset T$

Normální a Galoisova rozšíření ve vztahu k rozkladovým nadtělesům

Abstraktní Galoisova korespondence

Základní vlastnosti Fix a Gal

Galoisova grupa pro $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n}) \supset \mathbb{Q}$

Charakterizace radikálu

Základní vlastnosti $V(S), I(X)$

Algebraické množiny jako průnik nadploch

Charakterizace ireducibilních algebraických množin

Celistvé prvky v $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$

Norma, stopa a invertibilní prvky v kvadratických tělesech

Ideály v kvadratických tělesech a dělitelnost

Norma ideálu

2 Těžší otázky

Hilbertova věta o bázi

Ireducibilní prvky v $R[x]$ a gaussovskost $R[x]$

Čínská zbytková věta

Rozšiřování homomorfismů mezi rozkladovými nadtělesy

Existence a jednoznačnost algebraického uzávěru

Separabilní konečná rozšíření jsou jednoduchá

$T = \text{Fix}(U, G)$. Vlastnosti $U \supset T$

Základní věta Galoisovy teorie

Tělesa konečně generovaná jako modul a okruh

Slabá Hilbertova věta o nulách

Hilbertova věta o nulách

Rozklad algebraické množiny na ireducibilní komponenty

Krácení ideálů v kvadratických tělesech

Prvoideály a faktorizace v kvadratických tělesech

Popis prvoideálů v kvadratických tělesech