Komutativní okruhy: Domácí úkol 3

Termín odevzdání: 16. prosince 2019 do 12:20

1. (8 bodů) Buď U rozkladové nadtěleso polynomu $f(x) = x^4 - 2$ nad tělesem $\mathbb{Q}$. Rozhodni, zda jde o Galoisovo rozšíření a urči $U, [U : \mathbb{Q}]$, bázi U jako vektorového prostoru nad tělesem $\mathbb{Q}$ a $\mathrm{Gal}(U/\mathbb{Q})$.

2. (7 bodů) Buď V rozkladové nadtěleso polynomu $(x^2 + 3)(x^2 - 2)$ nad tělesem $\mathbb{Q}$. Popiš $\mathrm{Gal}(V/\mathbb{Q})$ a všechna tělesa $V \supset U \supset \mathbb{Q}$. (Bez použití věty 2.28, kterou jsme úplně nedokázali.)

3. (5 bodů) Buď P prvoideál v okruhu R a I, J vlastní ideály v R. Dokaž:

   a) $\sqrt{I} \subset P$, právě když $I \subset P$.

   b) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.

4. (5 bodů) Buď K těleso a $V \subset K^n$ *neprázdná* algebraická množina. Dokaž, že V je ireducibilní, právě když je $I(V)$ prvoideál.

O úlohách se můžete bavit s ostatními, ale řešení sepište každý sám. Uvádějte (víceméně) všechny detaily v řešení.