Komutativní okruhy: Domácí úkol 2

Termín odevzdání: 2. prosince 2019 do 12:20

1. (7 bodů) Mějme obory $R \subset S \subset T$. Dokaž:

   a) Je-li T konečně generovaný S-modul a S konečně generovaný R-modul, pak je také T konečně generovaný R-modul.

   b) Ať $\alpha, \beta \in S$. Je-li α celistvý prvek nad R a β celistvý prvek nad $R[\alpha]$, pak je β celistvý prvek nad R.

   c) $\sqrt[3]{\sqrt{3} + \sqrt[5]{5}}$ je celistvý prvek nad $\mathbb{Z}$.

2. (6 bodů) Mějme algebraické rozšíření těles $U \supset T$ a T-homomorfismus $\varphi : U \to U$. Dokaž, že pak je φ dokonce T-automorfismus.

3. (6 bodů) Najdi prvek $\alpha \in \mathbb{C}$ takový, že $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) = \mathbb{Q}(\alpha)$.

4. (6 bodů) Buď U těleso a $G < \mathrm{Aut}(U)$ podgrupa. Dokaž, že pak pro všechna $\varphi \in \mathrm{Aut}(U)$ platí $\mathrm{Fix}(U, \varphi G \varphi^{-1}) = \varphi(\mathrm{Fix}(U, G))$.

O úlohách se můžete bavit s ostatními, ale řešení sepište každý sám. Uvádějte (víceméně) všechny detaily v řešení.