Komutativní okruhy: Domácí úkol 1

Termín odevzdání: 4. listopadu 2019 do 12:20

1. a) Dokaž lemma 1.6: Vlastní ideál I v okruhu R je prvoideál, právě když pro všechna $a, b \in R$ platí: $ab \in I \Rightarrow a \in I$ nebo $b \in I$.

   b) Použij lemma 1.6 k přímému důkazu, že pokud je ideál M maximální, pak je M prvoideál.

2. Buď R okruh. Dokaž, že je-li $R[x]$ noetherovský okruh, pak je také R noetherovský okruh. Hint: Je-li I ideál v R, uvažuj $I[x] \subset R[x]$.

3. Buď R gaussovský obor. Dokaž, že je-li $f \in R[x]$ ireducibilní, pak je to prvočinitel v $R[x]$ (bez použití věty 1.17 z přednášky, jde totiž o část jejího důkazu).

4. Buď R okruh a I, J komaximální ideály v R. Dokaž, že pro libovolná přirozená čísla m, n jsou také ideály I^m, J^n komaximální.

5. Buď R okruh. Multiplikativní množina S v R je neprázdná podmnožina $S \subset R$, která je uzavřená na násobení a neobsahuje 0. Pomocí Zornova lemmatu 1.22 (tedy bez použití lemmatu 1.23) dokaž:

   Buď S multiplikativní množina v okruhu R a I ideál v R takový, že $I \cap S = \emptyset$. Pak existuje prvoideál $P < R$ takový, že $P \supset I$ a $P \cap S = \emptyset$.

O úlohách se můžete bavit s ostatními (a se mnou), ale řešení sepište každý sám. Uvádějte (víceméně) všechny detaily v řešení. Každá úloha je za 5 bodů.