

Komutativní okruhy: Cvičení 2

22. října 2019

1. Popiš všechny ideály v okruhu $\mathbb{Z}/(150)$ a charakterizuj, které dvojice z nich jsou komaximální.
2. Najdi příklad uspořádané množiny \mathcal{A} , která obsahuje nespočetný řetězec \mathcal{B} (speciálně tedy takový, který nejde indexovat přirozenými čísly).
3. Použij důkaz tvrzení 1.20 (zejména krok, kdy $1 = a_1 + a_2$) ke konstrukci explicitního izomorfismu

$$\mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(m) \simeq \mathbb{Z}/(mn)$$

pro $n = 16, m = 35$. Jaké známé větě krok ze závorky odpovídá?

4. Buď R okruh. Pomocí Zornova lemmatu dokaž, že každý vlastní ideál je obsažený v nějakém maximálním ideálu.
5. Ať je R okruh a I_1, \dots, I_n po dvou komaximální ideály v R . Dokaž, že pak máme izomorfismus multiplikatívních grup

$$(R/(I_1 \cdots I_n))^\times \simeq (R/I_1)^\times \times \cdots \times (R/I_n)^\times.$$

6. Pomocí Zornova lemmatu dokaž, že každá lineárně nezávislá podmnožina vektorového prostoru jde rozšířit na bázi.
7. Buď (M, \leq) částečně uspořádaná množina. Dokaž pomocí Zornova lemmatu, že uspořádání \leq jde rozšířit na lineární uspořádání, čili že existuje uspořádání \preceq na M , které je lineární a splňuje: $x \leq y \Rightarrow x \preceq y$ pro všechna $x, y \in M$.

Další příklady:

8. Buď R okruh. R je obor, právě když $R[x]$ je obor.
9. Buď K těleso. Pak $K[x, y]$ i $K[x_1, x_2, \dots]$ (nekonečně mnoho proměnných) jsou gaussovské, ale $K[x, y]$ není obor hlavních ideálů (ale je noetherovský) a $K[x_1, x_2, \dots]$ není noetherovský ani obor hlavních ideálů.
10. a) Buď M noetherovský modul a N jeho podmodul. Dokaž, že pak je faktormodul M/N noetherovský.
b) * Buď M modul a N jeho podmodul. Pokud jsou N a M/N oba noetherovské, pak je noetherovský také M (použij tvrzení 1.10).
11. Buď R gaussovský obor a T jeho podílové těleso. Mějme nekonstantní primitivní polynom $f \in R[x]$. Pak f je ireducibilní v $T[x]$, právě když je ireducibilní v $R[x]$.
12. * Pomocí Zornova lemmatu dokaž, že pokud v okruhu R existuje vlastní ideál, který není konečně generovaný, pak v něm také existuje prvoideál, který není konečně generovaný.

Úlohy s * jsou trochu těžší.