Cvičení z teorie pravděpodobnosti 1

10. výpočet charakteristické funkce

1. výpočet charakteristické funkce náhodné veličiny s hodnotami v $\mathbb{N}_0$
2. přímý výpočet charakteristické funkce náhodné veličiny s hustotou
3. výpočet charakteristické funkce lineární transformace náhodného vektoru
4. výpočet charakteristické funkce nezávislého součtu (konvoluce) a nezávislého rozdílu n.veličin
5. výpočet ch. funkce veličiny, jejíž hustota je charakteristickou funkcí známého rozdělení až na násobek

---

1. Spočtěte charakteristickou funkci náhodných veličin postupně s rozdělením:

   a) alternativním b) geometrickým c) Poissonovým d) rovnoměrným na $\{1, \ldots, n\}$.

2. Spočtěte charakteristickou funkci náhodných veličin (či vektoru) postupně s rozdělením:[1,2]

   a) Exp(1) b) R(0,1) c) N(0,1) d) $\Gamma(a, p)$ e) Exp(λ) f) $R(a, b)$ g) $N(\mu, \sigma^2)$ h) $N(\mu, \Sigma)$.

3. Spočtěte charakteristickou funkci náhodných veličin postupně s rozdělením (či hustotou):

   a) binomickým b) negativně bin. c) multinomickým d) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ e) $f(x) = (1 - |x|)^+$

4. Spočtěte charakteristickou funkci s Cauchyho rozdělením s hustotou $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$.

5. Nechť následující náhodné veličiny jsou nezávislé

   $X \sim R(-1, 1)$ $Y \sim R\{-1, 1\}$ $Z, S \sim \text{Exp}(1)$ $U \sim N(0, 1)$ $V, W \sim f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$

   Spočtěte charakteristickou funkci náhodných vektorů

   a) $(U + W, S - Z)^\top$ b) $(V + W, 2W - U)^\top$ c) $(1 - 3X + Y, X + Y)^\top$ d) $(U, V, U - 2V + 3W, 1)^\top$

6. Uvažujte stejné zadání jako v příkladu 5. Spočtěte charakteristickou funkci veličin

   a) SV b) SY c) $W \ln |X|$ d) $(Z - S)X$

- Nechť n.v. X nabývá hodnot v $\mathbb{N}_0$ a $A(s) = Es^X$, pak X má charakteristickou funkci $Ee^{itX} = A(e^{it})$.
- Pokud X je reálná veličina s charakteristickou funkcí $\psi(t) = E \exp\{itX\}$, pak $Y = a + bX$ má charakteristickou funkci $E \exp\{itY\} = e^{ita}\psi(tb)$.
- Je-li X reálný vektor s charakteristickou funkcí $\psi(t) = E \exp\{it^\top X\}$, pak $Y = a + BX$ je vektor s charakteristickou funkcí $E \exp\{is^\top Y\} = e^{is^\top a}\psi(B^\top s)$.
- Jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s charakteristickou funkcí $\varphi(t)$, pak $Y = \sum_{k=1}^n X_k$ má charakteristickou funkci $\psi(t) = \varphi(t)^n$ a $Z = X_1 - X_2$ má charakteristickou funkci $\xi(t) = \varphi(t)\varphi(-t) = |\varphi(t)|^2$.
- Buď X reálná náhodná veličina se (spojitou) hustotou f_X. Nechť existuje reálná náhodná veličina Y se spojitou hustotou f_Y taková, že

  $$Ee^{itY} = \frac{f_X(t)}{f_X(0)}, \qquad \text{pak} \qquad Ee^{itX} = \frac{f_Y(t)}{f_Y(0)}.$$

  Důkaz: Veličina Y má podle předpokladu reálnou charakteristickou funkci, má tedy symetrické rozdělení a pro její charakteristickou funkci $\varphi(t)$ platí $\varphi(-t) = Ee^{-itY} = Ee^{itY} = \varphi(t)$. Kromě toho je její charakteristická funkce integrovatelná a podle inverzní formule tak dostáváme, že

  $$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(t)\, e^{-ity}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(-t)\, e^{ity}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(t)\, e^{ity}\, \mathrm{d}t = \frac{\int f_X(t) e^{ity}\, \mathrm{d}t}{2\pi f_X(0)} = \frac{Ee^{iyX}}{2\pi f_X(0)}.$$

  Platí tedy

  $$\frac{f_Y(y)}{f_Y(0)} = \frac{Ee^{iyX}}{2\pi f_X(0)} \Big/ \frac{Ee^{i0X}}{2\pi f_X(0)} = Ee^{iyX}.$$

---

[1]Pro $\forall \mu \in \mathbb{C}$ platí $\xi(\mu) := \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}\, \mathrm{d}x = 1$, neboť zřejmě $\xi(0) = 1$ a $\xi'(\mu) = 0$, funkce ξ je tedy konstantní 1 na $\mathbb{C}$.

[2]Pro $a \in \mathbb{C}, p > 0$ s $\Re a > 0$ platí $\zeta(a) := \int_0^\infty \frac{a^p x^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-ax}\, \mathrm{d}x = 1$, neboť $\zeta(1) = 1$ a $\zeta'(a) = 0$ dle Per Partés pro $\Re a > 0$.