cvičení z Náhodných procesů 1 (NMSA334)

7. sestavení matice intenzit, invariantní míra, posouzení trvalosti stavů

Vektor $\mathbf{a} \in [0,1]^S$ nazveme ***limitním rozdělením*** homogenního Markovova řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$ s maticemi přechodu $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$, pokud $\mathbf{a}^\top 1_S = 1$ a pokud pro každé $i \in S$ platí

$$\mathbf{a}^\top = \lim_{t\to\infty} 1_{\{i\}}^\top \mathbf{P}_t,$$

kde $\mathbf{1}_{\{i\}} \in \{0,1\}^S$ je i-tý kanonický vektor v $\mathbb{R}^S$ definovaný předpisem $1_{\{i\}}(j) = 1_{[i=j]}$.

Poznámka. Pokud existuje limitní rozdělení $\mathbf{a}$, pak je to stacionární rozdělení, tedy $\mathbf{a}^\top = \mathbf{a}^\top \mathbf{P}_t, t \geq 0$.

U zprava spojitého homogenního markovského řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$ se stavy v $S \subseteq \mathbb{N}_0$ je možné kromě intenzit přechodu také uvažovat ***intenzitu okamžité exploze***

$$0 \leq \boldsymbol{q_{i,\infty}} \stackrel{\text{def}}{=} |q_{ii}| - \sum_{j\neq i} q_{ij} = \lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0^+} \tfrac{1}{h}\mathbb{P}_i(X_h \geq n), \quad i \in S,$$

popisující *intenzitu přechodu řetězce do okolí nekonečna*. Ve skriptech se tento pojem nezavádí, pouze se od určité chvíle připouštějí jen takové řetězce, které splňují podmínku

$$\boldsymbol{q^{(\infty)}} \stackrel{\text{def}}{=} (q_{i,\infty})_{i\in S} = -\mathbf{Q}1_S = 0_S. \tag{1}$$

Poznámka. Je-li $(X_t)_{t\geq 0}$ zprava spojitý homogenní markovský řetězec s množinou stavů $S \subseteq \mathbb{N}_0$ s maticí intenzit $\mathbf{Q}$ splňující podmínku (1) a je-li jeho vnořený řetězec $(Y_n)_{n=0}^\infty$ nerozložitelný s trvalými stavy, pak existuje invariantní (stacionární) míra $\eta \in (0,\infty)^S$ jednoznačně určená až na multiplikativní konstantu jako řešení soustavy

$$\boxed{\eta^\top \mathbf{Q} = 0_S^\top}.$$

Protože matice přechodu $\mathbf{Q}^*$ vnořeného řetězce splňuje rovnost

$$\boxed{\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(\mathbf{q})(\mathbf{Q}^* - \mathbb{1}_S)},$$

dostáváme, že v tomto případě existuje také stacionární míra η^* vnořeného řetězce $(Y_n)_{n=0}^\infty$ taková, že

$$\boxed{\eta^* = \operatorname{diag}(\mathbf{q})\,\eta},$$

neboť $0_S^\top = \eta^\top Q = \eta^\top \operatorname{diag}(\mathbf{q})(\mathbf{Q}^* - \mathbb{1}_S) = [\operatorname{diag}(\mathbf{q})\eta]^\top(\mathbf{Q}^* - \mathbb{1}_S)$.

Důsledek. Nechť $(Y_n)_{n=0}^\infty$ je nerozložitelný homogenní Markovův řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P}$ s množinou stavů $S = \mathbb{N}_0$ s trvalými stavy. Pak existuje (něco jako) stacionární míra $\eta \in (0,\infty)^S$ splňující $\eta^\top \mathbf{P} = \eta^\top$, přičemž stacionární rozdělení existuje právě tehdy, když $\eta^\top 1_S < \infty$.

Náhled: Stačí uvažovat nezávislý Poissonův proces N např. s jednotkovou intenzitou a uvažovat proces $X_t = Y_{N_t}, t \geq 0$ a pro tento proces použít předchozí poznámku.

Příklady

1. Na stavbě pracuje N svářečů, kteří náhodně a nezávisle odebírají proud. Svářeč, který v čase t neodebírá proud, začne v intervalu $(t, t+h]$ proud odebírat s pravděpodobností $\lambda h + o(h)$; svářeč, který v čase t proud odebíral, ukončí odběr v intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\mu h + o(h)$. Nechť X_t značí počet svářečů, kteří v čase t odebírají proud. Najděte matici intenzit Markovova řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$ a určete stacionární rozdělení.

2. V obchodě pracují tři prodavačky. Pokud prodavačka právě někoho obsluhuje, pak pravděpodobnost, že zákazníka doobslouží v časovém intervalu $(t, t+h]$ a nikoho obsluhovat nebude, je $3h + o(h)$. V intervalu $(t, t+h]$ přijde jeden zákazník s pravděpodobností $2h + o(h)$, dva nebo více s pravděpodobností

$o(h)$ a žádný s pravděpodobností $1-2h+o(h)$. Předpokládejme, že zákazníci přicházejí zaměstnávat jednotlivé prodavačky nezávisle a rovněž ony se chovají nezávisle na svých kolegyních. Pokud všechny prodavačky obsluhují, nově příchozí zákazník odchází neobsloužen. Buď $(X_t)_{t\geq 0}$ Markovův řetězec udávající počet prodavaček obsluhujících zákazníky v čase t. Najděte matici intenzit řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$. Určete rozdělení počtu obsluhujících prodavaček v ustáleném režimu (tj. limitní rozdělení řetězce). Jaká je pravděpodobnost, že v ustáleném režimu žádná z prodavaček neobsluhuje zákazníka?

3. Na horskou chatu spolu vyjeli tři kamarádi. Při příjezdu na chatu v čase $t=0$ je jeden z nich nemocný. Vlastnosti nemoci jsou takové, že jsou-li spolu zdravý a nemocný jedinec, pak ten nemocný nakazí zdravého v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\frac{1}{2}h+o(h)$. Jedinec nemocný v čase t se naopak uzdraví v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\frac{1}{3}h+o(h)$. Uzdravování a infikování jednotlivých jedinců probíhá nezávisle (nakažený=infikovaný=nemocný). Zdravý jedinec nemůže nakazit nikoho. Nechť Markovův řetězec $(X_t)_{t\geq 0}$ udává počet nemocných kamarádů na chatě v čase t. Určete matici intenzit přechodu řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$. Spočtěte matici pravděpodobností přechodu vnořeného řetězce. Spočtěte stacionární rozdělení řetězce. Jaká je střední hodnota doby setrvání řetězce v počátečním stavu?

4. Uvažujme matici

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ pq & -p & p^2 & 0 & \dots \\ p^2q & 0 & -p^2 & p^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $0<p<1$ a $p+q=1$. Předpokládejme, že $\mathbf{Q}$ je matice intenzit Markovova řetězce se spojitým časem a spočetnou množinou stavů. Rozhodněte, zda existuje stacionární rozdělení.

5. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném řetězci. Rozhodněte, zda všechny stavy vnořeného řetězce jsou trvalé. Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení vnořeného řetězce. Pokud ano, tak ho určete. Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit $\mathbf{Q}$. Pokud ano, tak ho určete.

6. V Karlíně je stojan na půjčování kol, který má tři místa. Předpokládejme, že v čase $t=0$ jsou ve stojanu všechna tři kola. Cyklista, který má v čase t půjčené kolo, ho přijede vrátit v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\lambda h+o(h), \lambda>0$. Pravděpodobnost, že přijede více než jeden cyklista v $(t, t+h]$ je $o(h)$. Nový zájemce o půjčení kola přijde v časovém intervalu $(t, t+h]$ s pravděpodobností $\mu h+o(h), \mu>0$, která je stejná pro všechna $t\geq 0$. Pokud je stojan prázdný, člověk nečeká a odchází jinam. Předpokládejme, že vypůjčování a vracení kol probíhá nezávisle. Nechť X_t je počet kol ve stojanu v čase $t\geq 0$. Určete matici intenzit procesu $(X_t)_{t\geq 0}$ a stacionární rozdělení (pokud existuje). Jaká je střední doba setrvání v počátečním stavu?

7. Na letišti uvažujme pět přepážek pro odbavení cestujících. Předpokládejme, že příchody cestujících k přepážkám tvoří Poissonův proces. Pokud jsou všechny přepážky obsazeny, řadí se cestující do jedné fronty (na letišti je dost místa, takže fronta může být libovolně dlouhá). Dále předpokládejme, že doby odbavení jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou 3 minuty. Najděte limitní rozdělení počtu cestujících v systému (u přepážek i ve frontě celkem), pokud cestující přicházejí v průměru každou minutu.

8. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -9 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném diskrétním řetězci. Najděte stacionární rozdělení ve vnořeném diskrétním řetězci. Najděte stacionární rozdělení v řetězci s maticí intenzit Q.

9. Uvažujme poštu, ve které jsou v provozu tři přepážky. U každé přepážky má doba obsluhy klienta exponenciální rozdělení se střední hodnotou 5 minut, doby obsluhy jsou nezávislé. Příchody klientů tvoří Poissonův proces. Pokud jsou všechny přepážky obsazeny, řadí se zákazníci do jedné společné fronty, která může být libovolně dlouhá. Zákazníci přicházejí na poštu v průměru každé dvě minuty. Najděte limitní rozdělení počtu klientů (u přepážek a ve frontě dohromady).

10. V holičství pracují 3 holiči. Každý z nich obsluhuje jednoho zákazníka průměrně 10 minut. Do holičství přichází v průměru 12 zákazníků za hodinu. V případě, že žádný z holičů není volný, zákazníci čekají v jediné frontě, přičemž zákazník, který by se musel do fronty zařadit jako čtvrtý, odchází neobsloužen. Předpokládáme, že doby mezi příchody zákazníků i doby obsluhy jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením. Označme X_t počet zákazníků v holičství (ve frontě i v obsluze) v čase t.

   a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$.

   b) Najděte stacionární rozdělení počtu zákazníků v holičství (pokud existuje).

   c) Určete střední počet zákazníků ve frontě (při stacionárním rozdělení).

11. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & -6 & 3 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & 0 & -8 & 4 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

   a) Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném řetězci.

   b) Rozhodněte, zda všechny stavy vnořeného řetězce jsou trvalé.

   c) Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení vnořeného řetězce. Pokud ano, tak ho určete.

   d) Zjistěte, zda existuje stacionární rozdělení řetězce s maticí intenzit Q. Pokud ano, tak ho určete.

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 3 & 0 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & 0 & -5 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 0 & -8 & 4 & 0 & \dots \\ 8 & 0 & 0 & -16 & 8 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_6 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

12. V jisté firmě je N počítačů, o které se stará r správců. U každého počítače může dojít k problému, přičemž výskyt problému nezávisí na předchozím stavu počítače ani na stavu ostatních počítačů. V případě výskytu problému je okamžitě povolán jeden správce na jeho řešení. Pokud jsou všichni správci zaměstnáni, počítač nepracuje a čeká na vyřešení problému. Předpokládá se, že na jednom počítači pracuje jen jeden správce a správci pracují nezávisle. Dále předpokládejme, že u každého počítače jsou doby mezi problémy nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\lambda > 0$ a doby řešení problému správci jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitou $\mu > 0$. Nechť X_t je počet počítačů, které v čase t nepracují.

    a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$.

    b) Najděte stacionární rozdělení řetězce (pokud existuje).

13. Předpokládejme, že příchody tiskových úloh odesílaných na tiskárnu tvoří Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$. Úlohy se řadí do tiskové fronty a jsou zpracovávány jedna po druhé podle pořadí příchodu. Doby zpracování mají exponenciální rozdělení s intenzitou $\mu > 0$, jsou vzájemně nezávislé a nezávislé na procesu příchodů úloh. Nechť X_t značí počet úloh v systému (čekajících i zpracovávaných dohromady) v čase t.

    a) Určete matici intenzit Markovova řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$.

    b) Zjistěte, za jakých podmínek jsou všechny stavy vnořeného řetězce trvalé.

    c) Zjistěte, kdy existuje stacionární rozdělení a určete ho.

    d) Spočtěte střední počet úloh čekajících ve frontě v ustáleném provozu.

14. V dvoupokojovém bytě bydlí tři kamarádi, přičemž se každý z nich čas od času rozhodne přestěhovat do jiného pokoje. Předpokládejte, že se všichni tři rozhodují nezávisle podmíněně současným a také historickým rozmístěním v bytě a to následovně. Je-li v čase t v pokoji n-lidí, pak pro každého z nich platí, že se přestěhuje v časovém intervalu $[t, t+h)$ s pravděpodobností $n^2h + o(h)$ pro $h \to 0^+$. Označme X_t počet kamarádů okupujících první pokoj v čase $t \geq 0$.

    a) Sestavte matici intenzit přechodu řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$.

    b) Najděte stacionární rozdělení řetězce $(X_t)_{t\geq 0}$.

    c) Předpokládejte, že se na začátku všichni tři kamarádi nastěhovali do prvního pokoje. Napište střední hodnotu a směrodatnou odchylku náhodné veličiny označující dobu, do kdy druhý pokoj zůstává prázdný.

15. Uvažujme Markovův řetězec s maticí intenzit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

    Určete matici pravděpodobností přechodu ve vnořeném diskrétním řetězci. Najděte stacionární rozdělení ve vnořeném diskrétním řetězci. Najděte stacionární rozdělení v řetězci s maticí intenzit Q.