cvičení z Náhodných procesů 1 (NMSA334)

6. Perronův vzorec, markovské řetězce se spojitým časem, intenzita náhodné veličiny

Intenzitou nezáporné náhodné veličiny $X \geq 0$ s hustotou f rozumíme funkci (určenou jednoznačně sv.)

$$r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{f(x)}{\mathbb{P}(X>x)}.$$

Poznámka. Intenzita r náhodné veličiny $X \geq 0$ určuje její rozdělení, neboť

$$\mathbb{P}(X > x) = \exp\{-\textstyle\int_0^x r(u)\,\mathrm{d}u\}, \quad x \geq 0.$$

Intenzita náhodné veličiny $X \geq 0$ je sv. rovna konstantě $\lambda > 0$ právě tehdy, když $X \sim \Gamma(\lambda, 1)$.

Buď $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ náhodná procházka jdoucí do ∞ pro $n \to \infty$ s krokem $X_n \stackrel{\text{def}}{=} S_n - S_{n-1} \sim \Gamma(\lambda, 1), n \in \mathbb{N}$, kde $\lambda > 0$. Pak čítací proces

$$\boxed{N_t \stackrel{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} 1_{[S_k \leq t]}, \quad t \in [0, \infty),}$$

nazveme ***Poissonovým procesem*** s intenzitou $\lambda > 0$.

Poznámka. Poissonův proces N s intenzitou $\lambda > 0$ má nezávislé přírůstky $N_{t+h} - N_t \sim Po(\lambda h), h \geq 0$ a splňuje markovskou podmínku

$$\mathbb{P}(N_t = j | N_{s_k} = i, N_{s_{k-1}} = i_{k-1}, \ldots, N_{s_0} = i_0) = \mathbb{P}(N_t = j | N_{s_k} = i),$$

kdykoli $0 \leq s_0 \leq \ldots \leq s_k \leq t$ a kdykoli má jev v podmínce na levé straně kladnou pravděpodobnost. Je-li M Poissonův proces s intenzitou $\kappa > 0$ nezávislý s N, pak $N + M$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda + \kappa$.

Nechť $(X_t)_{t \geq 0}$ je zprava spojitý homogenní markovský řetězec s množinou stavů $S \subseteq \mathbb{N}_0$, přičemž existuje ***matice intenzit*** pravděpodobností přechodu

$$\boxed{\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0^+} \tfrac{1}{h}[\mathbf{P}_h - \mathbb{1}_S] \in [-\infty, \infty]^{S \times S}}, \qquad \text{kde} \qquad \mathbf{P}_h \stackrel{\text{def}}{=} \big(\mathbb{P}(X_{t+h} = j | X_t = i)\big)_{i,j \in S},$$

kdykoli $t \in [0, \infty)$. Pokud $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{S \times S}$ splňuje[1] podmínku $\mathbf{Q}1_S = 0_S$, pak matice

$$\mathbf{Q}^* \stackrel{\text{def}}{=} (q^*_{ij})_{i,j \in S}, \qquad \text{kde} \qquad \boxed{q^*_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{q_{ij}}{|q_{ii}|} 1_{[i \neq j]} & \text{pokud } q_{ii} \neq 0, \\ 1_{[i=j]} & \text{jinak (tj. } i \text{ je absorpční stav),} \end{cases}}$$

je maticí přechodu ***vnořeného řetězce***[2] $Y \stackrel{\text{def}}{=} (X_{J_n})_{n=0}^{\infty}$, kde $\boldsymbol{J_0} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ a $\boldsymbol{J_n} \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \geq J_{n-1}; X_t \neq X_{J_{n-1}}\}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou *okamžiky přeskoků* řetězce X. Pro ***doby mezi přeskoky*** $\boldsymbol{T_k} \stackrel{\text{def}}{=} J_k - J_{k-1}$ pak platí, že

$$T_{k+1} | Y_0, \ldots, Y_k, T_1, \ldots, T_k; J_k < \infty \sim \Gamma(q_{Y_k}, 1), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

kde $\boldsymbol{q_i} \stackrel{\text{def}}{=} |q_{ii}|$ je ***intenzita výstupu*** ze stavu $i \in S$ a kde $\Gamma(0, 1)$ je zde třeba vnímat jako rozdělení deterministické zobecněné reálné n.v. nabývající skoro jistě hodnoty ∞.

Poznámka. U zprava spojitého řetězce s množinou stavů $S \subseteq \mathbb{N}_0$ s maticí intenzit $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{S \times S}$ splňující podmínku $\mathbf{Q}1_S = 0_S$ neposuzujeme periodicitu. Stav řetězce je trvalý (resp. přechodný), pokud je trvalým (resp. přechodným) stavem vnořeného řetězce. Je-li navíc řetězec nerozložitelný a všechny stavy trvalé, pak existuje (až na multiplikativní násobek právě jedna) ***invariantní míra*** $\eta \in (0, \infty)^S$ splňující (dle definice) podmínku $\boldsymbol{\eta}^{\mathsf{T}}(\mathbf{P}_t - \mathbb{1}_S) = 0, t \in [0, \infty)$, kterou lze získat jako řešení rovnice

$$\boxed{\eta^{\mathsf{T}} \mathbf{Q} = 0_S^{\mathsf{T}}.}$$

Splňuje-li invariantní míra η podmínku $\eta^{\mathsf{T}} 1_S = 1$, pak ji také nazýváme ***stacionárním rozdělením*** a značíme symbolem $\boldsymbol{\pi}$.

---

[1]Podmnínka $\mathbf{Q}1_S = 0_S$ je v tomto případě splněna automaticky například, je-li množina S konečná.

[2]homogenního markovského

Perronův vzorec Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ má celkem k různých charakteristických čísel λ_j s násobnostmi m_j. Nechť $R \in (0,\infty)$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^k \subseteq \mathcal{K}_R \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \in \mathbb{C}; |x| < R\}$ a nechť $f : \mathcal{K}_R \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n \overset{\text{def}}{=\!=}: \boxed{f(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{(m_j-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m_j-1}}{\mathrm{d}\lambda^{m_j-1}} \left[(\lambda-\lambda_j)^{m_j}(\lambda \mathbb{1}_m - \mathbf{A})^{-1} f(\lambda)\right]\Big|_{\lambda\to\lambda_j}}.$$

Poznámka. Pokud $(X_t)_{t\geq 0}$ je zprava spojitý homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů $S = \{1,\dots,m\}$ a s maticí intenzit pravděpodobností přechodu $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, pak matici pravděpodobností přechodu za čas $t \in [0,\infty)$ lze získat z následujícího vzorce

$$\boxed{\mathbf{P}_t = e^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} Q^k}.$$

Tento systém matic je jednoznačným řešením každé z následujících soustav rovnic

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t\mathbf{Q}}, \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}_t = \mathbf{Q}\mathbf{P}_t}$$

odpovídající počáteční podmínce $\mathbf{P}_0 = \mathbb{1}_m$. Speciálně pak vektor absolutních pravděpodobností $\mathbf{p}_t^\intercal = \mathbf{p}_0^\intercal \mathbf{P}_t$ řeší soustavu rovnic

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_t^\intercal = \mathbf{p}_t^\intercal \mathbf{Q}},$$

neboť $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_t^\intercal = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_0^\intercal \mathbf{P}_t = \mathbf{p}_0^\intercal \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}_t = \mathbf{p}_0^\intercal \mathbf{P}_t \mathbf{Q} = \mathbf{p}_t^\intercal \mathbf{Q}$ platí pro každé $t > 0$.

Příklady

1. Buďte X, Y nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s intenzitami po řadě $\lambda, \kappa > 0$. (a) Ukažte, že veličina $Z \overset{\text{def}}{=\!=} \min\{X, Y\}$ má také exponenciální rozdělení a určete odpovídající intenzitu. (b) Spočtěte $\mathbb{P}(X < Y)$. (c) Určete podmíněné rozdělení $\mathbb{P}_{Z|X<Y}$.

2. Buď N_t Poissonův proces s intenzitou $\kappa > 0$. Ukažte, že proces $X_t = 1_{[N_t \text{ je liché}]} = N_t \bmod 2, t \geq 0$ je homogenní markovský řetězec. Určete matice pravděpodobností přechodu $(\mathbf{P}_t)_{t\geq 0}$ a matici intenzit $\mathbf{Q}$. Určete také matici přechodu vnořeného řetězce $\mathbf{Q}^*$. V obou řetězcích spočtěte stacionární rozdělení.

3. Řešte předchozí příklad s hodnotou 3 na místo hodnoty 2, tedy uvažujeme $X_t \overset{\text{def}}{=\!=} N_t \bmod 3$.

4. Mějme dán homogenní Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů $\{0,1\}$, který má matici intenzit přechodu
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\kappa & \kappa \\ \mu & -\mu \end{pmatrix},$$
kde $\kappa, \mu > 0$. Předpokládejme, že počáteční rozdělení je $\mathbf{p}_0 = (0,1)^\intercal$. Určete absolutní pravděpodobnosti v čase $t > 0$.

5. Uvažujme homogenní Markovův řetězec se spojitým časem, který má matici intenzit přechodu
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Spočtěte odpovídající matice pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}_t, t \geq 0$. Určete matici pravděpodobností přechodu příslušného vnořeného řetězce.

6. Určete hodnoty parametrů $q \in \mathbb{R}$, pro které je matice
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q^3 & 1 & 0 \\ 0 & -q & q \\ 1 & -q & q-1 \end{pmatrix}$$
maticí intenzit přechodu pro nějaký homogenní Markovův řetězec se spojitým časem.