# 5. soutěžní série – řešení

**1.** Buď $\mathcal{D}$ množina, kde je $f$ nenulová. Na $\mathcal{D}$ je $f = \frac{f^3}{f^2} = \frac{p}{q}$ v základním tvaru podílem dvou polynomů. Navíc $f^2 = \frac{p^2}{q^2}$ je také polynomem, tedy $q = 1$ a $f = p$ na $\mathcal{D}$. Celá $f$ musí být slepená z polynomu $p$ a nulové funkce, ale ze spojitosti $f^2$ už plyne, že $f$ je jediným polynomem na celém $\mathbb{R}$.

**2.** Ano, je to možné. Čtvereček, jehož levý dolní roh má souřadnice $(x, y)$ obarvíme právě tehdy, když $\max(x, y) \geq 2\min(x, y)$. (Jinými slovy, podél přímky $y = x + D$ obarvíme prvních $|D| + 1$ čverečků. Tedy pro $\max(x, y) = k$ máme obarvených přesně $\left\lfloor \frac{k}{2} + 1 \right\rfloor$ čtverečků. Protože v čtverci $n \times n$ může $\max(x, y)$ nabývat hodnot $0, \ldots, n-1$, je v tomto čtverci přesně

$$2\left(\sum_{k=0} \left\lfloor \frac{k}{2} + 1 \right\rfloor\right) - 1$$

čtverečků (dvojnásobek díky tomu, že maximum se může nabývat v $x$ nebo v $y$, a odečteme jedničku, protože případ $x = y = 0$ (jediný případ, kdy $x = y$) jsme započítali dvakrát). Pokud $n$ je sudé, pak $2\left(\sum_{k=0} \left\lfloor \frac{k}{2} + 1 \right\rfloor\right) - 1 = 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} i - 1 = 4\frac{\frac{n}{2}\frac{n+2}{2}}{2} - 1 = \frac{n^2}{2} + n - 1 > \frac{n^2}{2}$. Pokud je liché, pak $2\left(\sum_{k=0} \left\lfloor \frac{k}{2} + 1 \right\rfloor\right) - 1 = 4\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} i + 2\frac{n+1}{2} - 1 = 4\frac{\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2}}{2} + n + 1 - 1 = \frac{n^2}{2} + n - \frac{1}{2} > \frac{n^2}{2}$

**3.** Ukážeme indukcí podle $k$. Pro $k = 1$ je $(n+1)^3 \equiv 1 = 1^{32} \pmod{n}$. Nyní buď $a$ takové, že $a^{32} \equiv (n+1)^3 \pmod{n^k}$. Tedy existuje $b \in \mathbb{Z}$, že $a^{32} = (n+1)^3 + bn^k$. Protože $n$ je liché, jsou 32 a $n$ nesoudělné. Protože $a^{32} \equiv (n+1)^3 \equiv 1 \pmod{n}$, je $a$ také nesoudělné s $n$. Tedy existuje $m \in \mathbb{Z}$ takové, že $n \mid b + 32a^{31}m$. Tedy platí

$$(a + mn^k)^{32} \equiv a^{32} + 32a^{31}mn^k = (n+1)^3 + (b + 32a^{31}m)n^k \equiv (n+1)^3 \pmod{n^{k+1}}.$$

Tím máme hotový indukční krok z $k$ do $k + 1$.

**4.** Pro $n = 1$ je nerovnost ekvivalentní s $f(x_1) \geq f(y_1)$, kde $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$. Stačí ukázat, že $f$ je rostoucí na $(0, 1)$. Platí $f'(x) = \frac{x \ln x + 2 - 2x}{2x(1-x)^{3/2}}$. Jmenovatel je kladný a čitatel je také kladný, protože je nulový pro $x = 1$ a na $(0, 1)$ klesající, což se ověří dalším zderivováním.

Pro $n \geq 2$ si napíšeme součet logaritmů jako logaritmus součinu a aplikací právě dokázaného výsledku pro $n = 1$ dostaneme

$$\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{\ln y_1 + \cdots + \ln y_n} \leq \sqrt{\frac{1 - x_1x_2 \ldots x_n}{1 - y_1y_2 \ldots y_n}} \overset{?}{\leq} \sqrt{\frac{1 - x_1}{1 - y_1} + \cdots + \frac{1 - x_n}{1 - y_n}}.$$

Poslední nerovnost dokážeme indukcí. Případ $n = 1$ je zřejmý. V indukčním kroku si označme $z = x_2 \ldots x_n$, $w = y_2 \ldots y_n$ a protože $0 < (1 - x_1)(1 - z)$, máme $1 - x_1z < 1 - x_1 + 1 - z$, a tedy

$$\frac{1 - x_1z}{1 - y_1w} < \frac{1 - x_1}{1 - y_1w} + \frac{1 - z}{1 - y_1w} < \frac{1 - x_1}{1 - y_1} + \frac{1 - z}{1 - w} \leq \frac{1 - x_1}{1 - y_1} + \frac{1 - x_2}{1 - y_2} + \cdots + \frac{1 - x_n}{1 - y_n},$$

kde poslední rovnost plyne z indukčního předpokladu.