5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 11. 12. 2023

Úloha 1. Pro čtvercovou reálnou matici A řádu 5 s po dvou různými sloupci označme k_A počet všech lineárně nezávislých množin tvořených sloupcovými vektory matice A. Určete největší a nejmenší možnou hodnotu k_A, je-li hodnost matice A rovna 3.

Úloha 2. V rovnostranném trojúhelníku je pravidelně rozmístěno $\frac{n(n+1)}{2}$ zhasnutých žárovek. Můžeme přepínat libovolné trojice navzájem sousedících žárovek. Rozhodněte, pro která n lze rozsvítit všechny.

Úloha 3. Buď p prvočíslo. Dokažte, že posloupnost $a_n = n^n \pmod p$, $n = 1, 2, \ldots$ je periodická a najděte její nejmenší periodu.

Úloha 4. Ukažte, že pro každý reálný polynom P existují reálné polynomy Q, R takové, že $P(x) = Q(R(x)) - R(Q(x))$ pro všechna reálná x.

Úloha 5. Uvažujme kvádry A a B o rozměrech $a_1 \times a_2 \times a_3$, $b_1 \times b_2 \times b_3$. Je možné, aby se nějak otočený A mohl umístit dovnitř B a zároveň aby $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$?

$\star$ **Úloha 6.** Podmnožinu S množiny $\{1, ..., n\}$ nazveme *mimořádnou*, jestliže prvky S jsou po dvou nesoudělné. Označme M_n mimořádnou podmnožinu $\{1, ..., n\}$ s největším součtem prvků. Dokažte, že je-li n dost velké, pak je každý prvek M_n dělitelný nejvýše dvěma různými prvočísly.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

5th home series

Solutions will be presented at the seminar on December 12, 2023.

Problem 1. For a 5×5 real matrix A with pairwise distinct columns we denote k_A the number of all linearly independent sets consisting of column vectors of A. Determine the maximal and minimal possible values of k_A if the rank of A is 3.

Problem 2. In an equilateral triangle there are $\frac{n(n+1)}{2}$ extinguished light bulbs spaced regularly. We can switch any triple of pairwise neigbouring light bulbs. Decide, for what n can we light up all the light bulbs.

Problem 3. Let p be a prime. Prove that the sequence $a_n = n^n \pmod{p}$, $n = 1, 2, \ldots$ is periodic and find its minimal period.

Problem 4. Show that for each real polynomial P there exist real polynomials Q, R such that $P(x) = Q(R(x)) - R(Q(x))$ for every real x.

Problem 5. Consider two cuboids A and B of dimensions $a_1 \times a_2 \times a_3$ and $b_1 \times b_2 \times b_3$. Is it possible that suitably rotated A can be put inside of B and simultaneously $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$?

$\star$ **Problem 6.** We call a subset S of the set $\{1, ..., n\}$ *exceptional* if the elements of S are pairwise coprime. Denote M_n the exceptional subset of $\{1, ..., n\}$ with a maximal sum of elements. Prove that if n is sufficiently large, then each element of S has at most two distinct prime divisors.