4. soutěžní série

20. 11. 2023

Úloha 1. Ukažte, že přirozené číslo n lze zapsat jako součet několika (alespoň dvou) po sobě jdoucích přirozených čísel právě tehdy, když n není mocnina dvojky. (5 bodů)

Úloha 2. Buď (a_i) posloupnost kladných reálných čísel a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

pro nějaké $a \in \mathbb{R}$. Ukažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{a^2}{2}, \quad \text{kde} \quad S_n = \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Rozhodněte, zda existují iracionální $a > 1$ a přirozené $n \geq 2$ takové, že

$$\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$$

je racionální. (10 bodů)

Úloha 4. V zemi je $n > 2$ měst a každé dvě jsou spojené přímou cestou. Každá cesta má kapacitu z množiny $\{1, 2, \ldots, m\}$ (různé cesty mohou mít stejnou kapacitu). Priorita města je součet kapacit všech cest z něj vycházejících. Najděte nejmenší m (v závislosti na n), pro něž je možné, aby každé z měst mělo jinou prioritu. (15 bodů)

4th contest series

20. 11. 2023

Problem 1. Show that a positive integer n is the sum of several (at least 2) consecutive positive integers if and only if n is not a power of 2. (5 points)

Problem 2. Let (a_i) be a sequence of positive real numbers such that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

for some real number a. Show that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^2} = \frac{a^2}{2} \quad \text{where} \quad S_n = \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j.$$

. (10 points)

Problem 3. Decide, whether there exist an irrational number $a > 1$ and a positive integer $n \geq 2$ such that

$$\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$$

is rational. (10 points)

Problem 4. There are $n > 2$ cities in a country and every two of them are connected by a direct road. Each road has a capacity from the set $\{1, 2, \ldots, m\}$ (different roads may have equal capacities). The priority of a city is the sum of capacities of all roads which lead to it. Find the smallest m (depending on n) for which it is possible that all cities have a different priority. (15 points)