4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 27. 11. 2023

Úloha 1. Konvexní mnohostěn P a koule K jsou v prostoru umístěny tak, že průnik K s libovolnou hranou AB je úsečka XY splňující $|AX| = |XY| = |YB| = \frac{1}{3}|AB|$. Ukažte, že existuje koule T dotýkající se všech hran P.

Úloha 2. Nechť a, b, c, A, B, C jsou reálná čísla, a, A $\neq 0$ a platí

$$|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$$

pro všechna reálná x. Ukažte, že $|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|$.

Úloha 3. Buď

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(x-1)^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mocninná řada s koeficienty a_n. Ukažte, že žádná trojice po sobě jdoucích a_n není nulová.

Úloha 4. Buď $A = (a_{ij})$ reálná $n \times n$ matice splňující $A^n \neq 0$ a $a_{ij}a_{ji} \leq 0$ pro všechna i, j. Dokažte, že aspoň dvě vlastní čísla matice A nejsou reálná.

Úloha 5. Množinu A nazveme *rozumnou*, pokud je omezená, uzavřená a obsahuje pouze racionální čísla. Dokažte, že neexistuje posloupnost rozumných množin $A_1, A_2, \ldots$ taková, že každá rozumná množina K je podmnožinou některé z množin A_n.

Úloha 6. Nechť G je grupa s jednotkou e a $\phi : G \to G$ funkce splňující

$$\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_3) = \phi(h_1)\phi(h_2)\phi(h_3),$$

kdykoliv $g_1g_2g_3 = e = h_1h_2h_3$. Ukažte, že ϕ lze vyjádřit předpisem $\phi(x) = a\psi(x)$, kde $a \in G$ a ψ je homomorfismus (tj. $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ pro všechna $x, y \in G$).

4th home series

Solutions will be presented at the seminar on November 27, 2023.

Problem 1. A convex polygon P and a ball K are placed in the space in such a way that the intersection of K with each edge of AB is a line segment XY satisfying $|AX| = |XY| = |YB| = \frac{1}{3}|AB|$. Show that there exists a ball T touching all edges of P.

Problem 2. Let a, b, c, A, B, C are real numbers, $a, A \neq 0$ and such that

$$|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$$

for all real numbers x. Show that $|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|$.

Problem 3. Let

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n(x-1)^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

be a power series with coefficients a_n. Show that no triple of consecutive a_n's is zero.

Problem 4. Let $A = (a_{ij})$ be a real $n \times n$ matrix such that $A^n \neq 0$ and $a_{ij}a_{ji} \leq 0$ for all i, j. Prove that at least two eigenvalues of A are non-real.

Problem 5. We call a set $A \subset \mathbb{R}$ *reasonable*, if it is bounded, closed, and contains only rational numbers. Prove that there does not exist a sequence of reasonable sets $A_1, A_2, \ldots$ such that every reasonable set K is a subset of some of the sets A_n.

Problem 6. Let G be a group with an identity element e and let $\phi : G \to G$ satisfy

$$\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_3) = \phi(h_1)\phi(h_2)\phi(h_3)$$

whenever $g_1 g_2 g_3 = e = h_1 h_2 h_3$. Show that ϕ can be expressed as $\phi(x) = a\psi(x)$ where $a \in G$ and ψ is a homomorphisms (i.e. $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ for all $x, y \in G$).