

3. soutěžní série

6. 11. 2023

Úloha 1. Existuje nekonečně mnoho trojic celých čísel $p > q > r > 0$ pro které je

$$p! \cdot q! \cdot r!$$

čtverec?

(5 bodů)

Úloha 2. Na stole leží 2023 (různých) plochých kamenů s horní stranou modrou a dolní červenou. Dva hráči se střídají v tazích. V každém tahu hráč otočí jeden z kamenů spodní stranou nahoru, ale nesmí se tím dostat do konfigurace, která už ve hře nastala. Hráč, který nemůže hrát, prohrál. Který hráč má vyhrávací strategii? (10 bodů)

Úloha 3. Uvažme množinu M všech 4×4 reálných matic jakožto vektorový prostor nad \mathbb{R} . Jakou dimenzi má podprostor generovaný všemi maticemi tvaru $AB - BA$, kde $A, B \in M$? (10 bodů)

Úloha 4. Jsou dány funkce $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro každou dvojici $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ platí $f(x) + g(y) > 0$ nebo $f(y) + g(x) > 0$. Dokažte, že neexistuje interval (a, b) takový, že pro všechna $x \in (a, b)$ nastane $f(x) + g(x) < 0$. (15 bodů)

3rd contest series

6. 11. 2023

Problem 1. Do there exist infinitely many triples of integers $p > q > r > 0$ such that

$$p! \cdot q! \cdot r!$$

is a perfect square? (5 points)

Problem 2. There are 2023 (distinct) flat stones on a table with the upper side blue and the lower side red. Two players take turns. In each move, the player flips one of the stones, but must not get into a configuration that has already occurred in the game. A player who cannot move loses. Which player has a winning strategy?

(10 points)

Problem 3. Consider the set M of all 4×4 real matrices as a vector space over \mathbb{R} . What is the dimension of the subspace generated by all matrices of the form $AB - BA$, where $A, B \in M$?

(10 points)

Problem 4. Given two functions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that for each couple $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ at least one inequality $f(x) + g(y) > 0$ or $f(y) + g(x) > 0$ holds true. Prove that there is no interval (a, b) such that $f(x) + g(x) < 0$ for all $x \in (a, b)$.

(15 points)