3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 13. 11. 2023

Úloha 1. Uvnitř strany BC konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ zvolíme body E a F tak, aby $\angle BAE = \angle FDC$ a $\angle EAF = \angle EDF$. Ukažte, že $\angle BDE = \angle FAC$.

Úloha 2. Buď $a \in \mathbb{N}$ liché. Uvažujme posloupnost přirozených čísel $\{u_n\}$ splňující $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ pro u_n sudé a $u_{n+1} = u_n + a$ pro u_n liché. Dokažte, že existuje n_0 takové, že $u_{n_0} \leq a$. Dále dokažte, že posloupnost $\{u_n\}$ začne být periodická.

Úloha 3. Uvažujme krychli složenou z $60 \times 60 \times 60$ krychliček. Jaký největší počet šachových věží lze rozmístit na její povrch, aby se navzájem neohrožovaly? Věž ohrožuje všechna pole ve svém řádku a sloupci na své stěně krychle a také pole na dalších stěnách, která leží na prodloužení tohoto sloupce resp. řádku přes hranu (nebo několik hran) krychle.

Úloha 4. Nechť $\mathcal{F}$ je množina všech konečných neprázdných podmnožin množiny $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Pro která $a > 0$ suma

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\sum_{k \in A} a^k}$$

konverguje?

Úloha 5. Matice A řádu n splňuje $3A^3 = A^2 + A + I$. Ukažte, že posloupnost A^k konverguje k matici B splňující $B^2 = B$.

Úloha 6. Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$ splňují $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a^3 + b^3 + c^3 \neq 1$. Funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme *správná*, pokud je spojitá a pro všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ splňuje

$$f(x) + f(y) + f(z) = f(ax + by + cz) + f(bx + cy + az) + f(cx + ay + bz).$$

1. Ukažte, že každá správná funkce je nekonečně diferencovatelná.
2. Nalezněte všechny správné funkce.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

3rd home series

Solutions will be presented at the seminar on November 13, 2023.

Problem 1. Let E and F be inner points of the side BC of a convex quadrilateral $ABCD$ s.t. $\angle BAE = \angle FDC$ and $\angle EAF = \angle EDF$. Show that $\angle BDE = \angle FAC$.

Problem 2. Let $a \in \mathbb{N}$ be odd. Consider a sequence of positive integers $\{u_n\}$ satisfying $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$ if u_n even and $u_{n+1} = u_n + a$ if u_n is odd. Prove that there exists n_0 such that $u_{n_0} \leq a$. Further prove that $\{u_n\}$ is eventually periodic.

Problem 3. Consider a cube consisting of $60 \times 60 \times 60$ little cubes. What is the maximal number of rooks that can be placed on the surface of the cube such that no rook attacks any other? In the face where the rook stands it attacks all fields that are in the same row or column as the rook. Moreover, it attacks all fields in other faces lying in the continuations of rook's row or column over the edge (or more edges) of the cube.

Problem 4. Let $\mathcal{F}$ be the set of all non-empty finite subsets of $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Find all $a > 0$ for which the sum

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} \frac{1}{\sum_{k \in A} a^k}$$

converges.

Problem 5. An $n \times n$ matrix A satisfies $3A^3 = A^2 + A + I$. Show that the sequence $\{A^k\}$ converges to a matrix B satisfying $B^2 = B$.

Problem 6. Let $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfy $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a^3 + b^3 + c^3 \neq 1$. We call a function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *correct* if it is continuous and satisfies

$$f(x) + f(y) + f(z) = f(ax + by + cz) + f(bx + cy + az) + f(cx + ay + bz)$$

for all $x, y, z \in \mathbb{R}$

1. Show that every correct function is infinitely differentiable.
2. Find all correct functions.