2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 30. 10. 2023

Úloha 1. Buď $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Najděte všechny n-tice navzájem různých přirozených čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ řešící rovnici

$$1 + x_1 + 2x_1x_2 + \cdots + (n-1)x_1x_2 \ldots x_{n-1} = x_1x_2 \ldots x_n.$$

Úloha 2. Konvexní množina M v rovině obsahuje počátek, ale neobsahuje žádný jiný bod s celočíselnými souřadnicemi. Průnik M s každým ze čtyř kvadrantů má stejný obsah. Jaký je největší možný obsah M?

Úloha 3. Buď f funkce $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ s následující vlastností: pokud posloupnost $(f(x_n))_{n \geq 1}$ konverguje, pak i $(x_n)_{n \geq 1}$ konverguje. Dokažte, že f je spojitá.

Úloha 4. Nechť $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ je funkce splňující $f(xy) \leq f(x)f(y)$ pro každá $x, y \in (0, +\infty)$. Ukažte, že

$$f(x^n) \leq f(x) f(x^2)^{\frac{1}{2}} \ldots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

pro každé $x > 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 5. Dvě komplexní $n \times n$ matice A a B splňují $A^2 + B^2 = 2AB$. Dokažte následující tvrzení:

1. $\det(AB - BA) = 0$,
2. pokud má $A - B$ hodnost 1, pak $AB = BA$.

Úloha 6. Buď $\leq$ reflexivní a slabě antisymetrická relace na konečné množině A. Rozhodněte, zda je možné rozšířit $\leq$ na nadmnožinu $B \supset A$ tak, aby rozšíření bylo na B reflexivní a slabě antisymetrické a aby každé dva prvky B měly nejmenší horní závoru a největší dolní závoru.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

2nd home series

Solutions will be presented at the seminar on October 30, 2023.

Problem 1. Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Find all n-tuples of pairwise different positive integers $x_1, x_2, \dots, x_n$ solving the equation

$$1 + x_1 + 2x_1x_2 + \dots + (n-1)x_1x_2 \dots x_{n-1} = x_1x_2 \dots x_n.$$

Problem 2. A convex set $M \subset \mathbb{R}^2$ contains the origin, but it does not contain any other point with integer coordinates. Intersection of M with each of the four quadrants has the same area. What is the largest possible area of M?

Problem 3. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a surjective function with the following property: if a sequence $(f(x_n))_{n\geq 1}$ is convergent, then also $(x_n)_{n\geq 1}$ is convergent. Prove that f is continuous.

Problem 4. Let $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ be a function satisfying $f(xy) \leq f(x)f(y)$ for all $x, y \in (0, +\infty)$. Show that

$$f(x^n) \leq f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}} \dots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

for every $x > 0$ and every $n \in \mathbb{N}$.

Problem 5. Two complex $n \times n$ matrices A and B satisfy $A^2 + B^2 = 2AB$. Prove the following:

1. $\det(AB - BA) = 0$,
2. if $\operatorname{rank}(A - B) = 1$, then $AB = BA$.

Problem 6. Let $\leq$ be reflexive and weakly antisymmetric relation on a finite set A. Decide, whether one can extend $\leq$ to a superset $B \supset A$, such that the extension is reflexive and weakly antisymmetric on B and every two elements of B have the smallest upper bound and the largest lower bound.
