1. soutěžní série – řešení

1. Předpokládejme pro spor, že existují $a, c \in A$, pro něž $ac \in B$ a naopak $b, d \in B$, pro něž $bd \in A$. Pak $A \ni ac(bd) = (ac)bd \in B$, spor.

2. Uvažujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $f(x + y) \geq f(xy)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že tato funkce musí být nutně konstantní.

Volbou $y = 0$ dostaneme, že $f(x) \geq f(0)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Volbou $y = -x$ dostaneme, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $f(0) \geq f(-x^2)$. To v kombinaci s $f(-x^2) \geq f(0)$ dává, že $f(t) = f(0)$ pro všechna $t \leq 0$. Nakonec pokud $t \geq 0$, pak volbou $x = y = -\sqrt{t}$ dostaneme $f(0) = f(-2\sqrt{t}) \geq f(t) \geq f(0)$, čili $f(t) = f(0)$.

3. Největší společný násobek (NSD) je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Dle Malé Fermatovy věty je $n^{p-1} - 1$ dělitelné p, pokud n není násobek p. Pišme $n^{13} - n = n(n^{13-1} - 1) = n((n^2)^{7-1} - 1) = n((n^3)^{5-1} - 1) = n((n^6)^{3-1} - 1) = n((n^{12})^{2-1} - 1)$. Každé z prvočísel 13, 7, 5, 3, 2 je buď dělitelem n, nebo není, ale v tom případě je dělitelem některé z výše uvedených závorek. Tj. NSD je násobkem čísla $D = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Pro $n = 2$ máme $2^{13} - 2 = 8190 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$, tedy $NSD = D$ nebo $NSD = 3D$. Druhá možnost nenastane, protože $3^{13} - 3$ není dělitelné číslem 3^2.

4. Buď A_n množina cest věže přes S_n do $(n, 1)$ a B_n množina cest věže přes S_n do $(n, 3)$. Najdeme bijekce mezi A_n, $A_{n-1} \cup B_{n-1}$ a B_n pro $n \geq 2$. Pak z $|A_1| = 0$ a $|B_1| = 1$ vyplyne $|A_n| = 2^{n-2}$ pro $n \geq 2$. Cesta do $(n, 1)$ končí buď krokem $(n - 1, 1) - (n, 1)$ nebo krokem $(n, 2) - (n, 1)$. V prvním případě musí cesta do $(n, 1)$ obsahovat kroky $(n - 1, 3) - (n, 3) - (n, 2) - (n - 1, 2)$. Když je nahradíme krokem $(n - 1, 3) - (n - 1, 2)$, dostáváme cestu přes S_{n-1} do $(n - 1, 1)$. Tuto úpravu lze obrátit, každá cesta z A_{n-1} musí obsahovat krok $(n - 1, 3) - (n - 1, 2)$, ten lze nahradit obloukem $(n - 1, 3) - (n, 3) - (n, 2) - (n - 1, 2)$ a tím dostaneme cestu do $(n, 1)$ končící $(n - 1, 1) - (n, 1)$. Ve druhém případě (cesta přes S_n do $(n, 1)$ končící $(n, 2) - (n, 1)$) musíme mít cestu končící zatáčkou $(n - 1, 3) - (n, 3) - (n, 2) - (n, 1)$, jejím odstraněním dostáváme cestu přes S_{n-1} do $(n - 1, 3)$. Jedná se o bijekci s cestami z B_{n-1}. Tedy $|A_n| = |A_{n-1} \cup B_{n-1}|$. Výměnou y-ových souřadnic 1 a 3 analogicky vyjde $|B_n| = |B_{n-1} \cup A_{n-1}|$.