

7. soutěžní série

2. 1. 2023

Úloha 1. Buď $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dvakrát diferencovatelná funkce s nezápornou druhou derivací. Ukažte, že

$$f(x + f'(x)) \geq f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(5 bodů)

Úloha 2. Pro $n \in \mathbb{N}$ a jednotkové vektory $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ dokažte

$$\max_{0 \leq i < j \leq n} (v_i, v_j) \geq -\frac{1}{n}.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Ukažte, že každé přirozené číslo je rozdílem dvou přirozených čísel a a b takových, že a a b mají stejný počet různých prvočíselných dělitelů.

(10 bodů)

Úloha 4. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo. Dokažte, že je možné označit vrcholy 2^n -úhelníka písmeny A a B tak, že při čtení n -tic písmen začínajících z každého z 2^n vrcholů ve směru hodinových ručiček dostaneme navzájem různé posloupnosti.

(15 bodů)