6. soutěžní série

12. 12. 2022

Úloha 1. Několik běžkařů jede v rovné stopě mezi Muzeem a I. P. Pavlova, každý svou vlastní konstantní rychlostí. Během určitého časového úseku se celkový součet vzájemných vzdáleností všech možných dvojic lyžařů zmenšuje. Rozhodněte, zda existuje někdo, jehož součet vzdáleností od ostatních se v tomto časovém úseku zmenšuje. (5 bodů)

Úloha 2. V matematické soutěži byly tři problémy. Každý problém byl hodnocen celým číslem mezi 0 a 7. Pro každé dva účastníky soutěže platí, že nanejvýš z jednoho problému dostali stejný počet bodů. Kolik nejvíce účastníků mohlo na soutěži být. (10 bodů)

Úloha 3. Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je definovaná jako $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ a rekurzivně

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

pro $n > 2$. Ukažte, že posloupnost je dobře definovaná a určete a_{2022}. (10 bodů)

Úloha 4. Symetrická singulární matice $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ řádu n, $n \geq 2$ obsahuje pouze celočíselné prvky. Označme A_i matici řádu $n-1$ získanou smazáním i-tého řádku a i-tého sloupce A. Nechť $\det(A_1) = 2022$. Ukažte, že 2022 dělí $\det(A_i)$ pro všechna i. (15 bodů)