

6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 19. 12. 2022.

Úloha 1. Je pravda, že v každém čtyřstěnu splňují některé tři z jeho čtyř výšek trojúhelníkovou nerovnost?

Úloha 2. Pro přirozené $n \in \mathbb{N}$ najděte počet dvojic přirozených čísel a, b splňujících $\frac{ab}{a+b} = n$.

Úloha 3. Házejme šestistěnnou kostkou, dokud součet padlých čísel nedosáhne hodnoty alespoň n . Buď $p(n)$ pravděpodobnost, že výsledný součet bude přesně n . Ukažte, že existuje limita $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)$ a najděte ji.

Úloha 4. Existuje posloupnost nenulových reálných čísel a_i taková, že každý polynom $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ má všechny své kořeny reálné a navzájem různé?

Úloha 5. Rozhodněte, pro která n lze vepsat čísla $1, 2, \dots, n^2$ do tabulky $n \times n$ tak, aby sousední čísla byla v sousedních polích (tj. se společnou stranou) a žádná dvě čísla se stejným zbytkem mod n nebyla ve stejném sloupci ani stejném řádku.

Úloha 6. Nechtě $f_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Indukcí definujeme $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt.$$

Ukažte, že řada $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ stejnoměrně konverguje na $[0, 1]$.