Úloha 3.3 Víme, že $f(x+1)-f(x)$ je nějaký polynom $p(x)$. Existuje polynom $q(x)$ takový, že $q(x+1)-q(x)=p(x)$? Hodilo by se, kdyby platilo „$f(x)=q(x)$“, bude něco takového platit?

Úloha 3.4 Pomocí Jordanova kanonického tvaru matic A a B ukažte, že obě mají pouze nulová vlastní čísla a hodnosti nejvýše 1.

Úloha 3.6 Nahlédněte, že rekurentní vztah $a_n = a_{n-1} + a_{n-p-1}$ s jedničkami pro počáteční členy ve skutečnosti počítá, kolika způsoby je možné vyjádřit n jako součet čitatelů 1 a $p+1$.

Úloha 4.3 Z rovnosti $A_1^2 = A_1$ lze (například pomocí Jordanova kanonického tvaru) vypozorovat, že vlastní čísla A_1 jsou pouze nuly a jedničky, že všechny mají plnou geometrickou násobnost, a že tedy pro $k=1$ nastane rovnost. Pro indukční krok se můžou hodit vztahy $\operatorname{rank}(AB) \leq \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$, $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

Úloha 4.4 Velmi snadno si všimneme, že daný zlomek je aspoň 1, ale ne o moc víc než 1. Stačí to jen správně dopočítat.

Úloha 4.5

$$\frac{1}{f(x+3)} = f''(x) + f(x) = f''(-x) + f(-x) = \frac{1}{f(-x+3)} = \frac{1}{f(x-3)},$$

odkud vyplyne, že f je 2-periodická, $f''(x)f(x+1) + f(x)f(x+1) = 1$.

Úloha 4.6 $b(2n) = b(n)$, $b(2n+1) = b(n)+1$. Najděte vztah mezi členy n, $2n$, $2n+1$ sumy ($\frac{b(n)}{n(n+1)}$, $\frac{b(n)}{2n(2n+1)}$, $\frac{b(n)+1}{(2n+1)(2n+2)}$).

Úloha 5.6 Pokuste se nahlédnout na maticový součin $A^T \cdot A = 0$ jako na skalární součin nějak kolmých sloupců A a dejte si pozor na komplexní sdružení čísel.

Úloha 6.3 Všimněte si, že $p(n)$ je právě aritmetickým průměrem $p(n-6), \ldots, p(n-1)$, a odvoďte, že se proto musí blížit k nějaké zatím neznámé hodnotě. Na druhou stranu si rozmyslete, že kdyby $p(n)$ byla konstantní posloupnost, pak z $1 = p(n) +$ (šance, že přeskočíme n) lze najít jedinou možnou limitu $p(n)$.