5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 5. 12. 2022.

Úloha 1. Definujme posloupnost a_n: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ a pro $n \geq 2$ vznikne a_n tak, že za sebe napíšeme čísla a_{n-1} a a_{n-2} v desítkové soustavě. Která a_n jsou dělitelná jedenácti?

Úloha 2. Body P, Q, R v rovině mají celočíselné souřadnice a platí $(|PQ| + |QR|)^2 < 8S + 1$, kde S je obsah trojúhelníku PQR. Ukažte, že P, Q, R jsou vrcholy čtverce.

Úloha 3. Ukažte, že pro reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2} \right)^2 \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Úloha 4. Existuje spojitá funkce f taková, že pro všechna reálná x platí

$$\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} x?$$

Úloha 5. Na tabuli jsou napsána čísla $1, 2, \dots, 2022$. V každém kroku vybereme dvojici čísel, tato čísla smažeme, a napíšeme absolutní hodnotu jejich rozdílu. Po 2021 zbylo jen jedno číslo k. Jakých hodnot může k nabývat?

Úloha 6. Jakou nejvyšší možnou hodnost může mít komplexní matice $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, pokud platí $A^T \cdot A = 0$?