

4. soutěžní série

14. 11. 2022

Úloha 1. V rovině jsou dány body A, B, C, D . Ukažte, že je možné vybrat podmnožinu Y množiny $\{A, B, C, D\} = X$ takovou, že neexistuje kruh K splňující $K \cap X = Y$. (5 bodů)

Úloha 2. Je dána množina S a binární operace \circ splňující (1) $\forall a \in S : a \circ a = a$ a (2) $\forall a, b, c \in S : (a \circ b) \circ c = (b \circ c) \circ a$. Ukažte, že \circ je asociativní a komutativní. (10 bodů)

Úloha 3. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{Q}^+$ platí zároveň

(a) $f(x+1) = f(x) + 1$,

(b) $f(x^2) = f(x)^2$. (10 bodů)

Úloha 4. Ukažte, že pro každé $k \geq 3$ existují přirozená čísla $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ splňující $\frac{1}{a_i} = \frac{1}{a_{i-2}} - \frac{1}{a_{i-1}}$, $i = 3, \dots, k$. Dále ukažte, že neexistuje posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ s touto vlastností. (15 bodů)