4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 21. 11. 2022.

Úloha 1. Najděte zobrazení $f : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{N}}$ takové, že $f(a) \subsetneq f(b)$ pro všechna $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ ($2^{\mathbb{N}}$ je množina všech podmnožin množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$).

Úloha 2. Na kružnici leží vrcholy osmiúhelníku. První, třetí, pátý a sedmý vrchol tvoří čtverec s obsahem 5, čtveřice zbývajících vrcholů tvoří obdélník s obsahem 4. Jaký je největší možný obsah osmiúhelníku?

Úloha 3. Nechť $A_1, \dots, A_k$ jsou reálné čtvercové matice stejného řádu takové, že $A_i^2 = A_i$. Nechť N_i je dimenze prostoru $\ker A_i$. Ukažte, že součet $N_1 + \cdots + N_k$ je větší nebo roven hodnosti matice $I - A_1 A_2 \cdots A_k$.

Úloha 4. Pro každé $n > 1$ definujme $k(n)$ jako největší přirozené k takové, že existuje přirozené m pro které $n = m^k$. Určete

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=2}^{n+1} k(i)}{n}.$$

Úloha 5. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvakrát diferencovatelná 4-periodická sudá funkce. Dokažte, že pokud

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{f(x+3)}$$

platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak f je 1-periodická.

Úloha 6. Označme počet jedniček ve dvojkovém zápisu n jako $b(n)$. Buď $d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n+n^2}$. Rozhodněte, zda je e^d racionální.