

3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 7. 11. 2022.

Úloha 1. Nechtě x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jsou kladná reálná čísla taková, že

$$\begin{aligned}x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 &= x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 \\ &= x_4^2 - x_4x_5 + x_5^2 = x_5^2 - x_5x_1 + x_1^2.\end{aligned}$$

Ukažte, že $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$.

Úloha 2. Uvnitř kružnice k leží trojúhelník ABC . Je možné na kružnici k zvolit bod D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl tečnový?

Úloha 3. Buď $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá funkce taková, že pro každé $y \in \mathbb{R}$ je $f(x+y) - f(x)$ polynom. Dokažte, že f je také polynom.

Úloha 4. Nechtě komplexní čtvercové matice A, B řádu 3 splňují $A^2 = B^2 = 0$. Jaké trojice vlastních čísel může mít matice $A + B$?

Úloha 5. Uvažujme čtvercovou síť nekonečnou ve všech směrech. Na začátku jsou na deseti políčkách ve čtverci 10×10 dlaždičky. Dvě políčka jsou sousední, pokud sousedí stranou. Máme dva druhy tahů:

(a) pokud jsou dlaždice na dvou sousedních políčkách, můžeme je obě odstranit,

(b) pokud je nějaká dlaždička na poli a na žádném sousedním dlaždičky nejsou, můžeme ji odstranit a na všechna čtyři sousední pole dlaždičky přidat.

Pro které počáteční konfigurace dokážeme po konečném počtu tahů odstranit všechny dlaždice?

Úloha 6. Nechtě p je prvočíslo. Posloupnost celých čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definujeme jako $a_n = 1$ pro $0 \leq n \leq p$ a $a_n = a_{n-1} + a_{n-p-1}$ pro $n > p$. Ukažte, že pro každé nezáporné celé k je $a_{pk} - a_k$ násobkem p .