2. soutěžní série – řešení

1. Jistě $x \geq 0$, pak výrazy pod odmocninami jsou kladné a umocňování je ekvivalentní úprava. Přesuneme $\sqrt{x}$ na pravou stranu, umocníme na druhou a tyto dva kroky opakujeme, tj. indukcí

$$\sqrt{4^k x + \sqrt{4^{k+1}x + \sqrt{4^{k+2}x + \sqrt{\cdots + \sqrt{4^n x + 3}}}}} = 1 + 2^k\sqrt{x}$$

$$4^k x + \sqrt{4^{k+1}x + \sqrt{4^{k+2}x + \sqrt{\cdots + \sqrt{4^n x + 3}}}} = 1 + 2^{k+1}\sqrt{x} + 4^k x$$

$$\sqrt{4^{k+1}x + \sqrt{4^{k+2}x + \sqrt{\cdots + \sqrt{4^n x + 3}}}} = 1 + 2^{k+1}\sqrt{x}$$

Nakonec dostaneme $4^n x + 3 = 1 + 2^{n+1}\sqrt{x} + 4^n x$, tj. $x = 4^{-n}$ je jediné řešení.

2. Pokud $2k - 1 > n$, pak je odpověď 0. Jinak rozptýlené k-prvkové podmnožině $\{a_1, \dots, a_k\} \subset S$, kde $a_1 < a_2 \cdots < a_k$, přiřadíme $\{a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \dots, a_k - (k-1)\} \subset \{1, 2, \dots, n - (k-1)\} =: \tilde{S}$. Rozmyslete si, že čísla $a_1, a_2 - 1, \dots, a_k - (k-1)$ jsou navzájem různá a zmíněné přiřazení je bijekce na k-prvkové podmnožiny množiny $\tilde{S}$. Těch je $\binom{n-k+1}{k}$ a to je odpověď pro případ $2k - 1 \leq n$.

3. Existuje. Najdeme posloupnost uzavřených intervalů $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \dots$ takovou, že každý interval $[\alpha_n^n, \beta_n^n]$ má délku 0.9 a celá část z každého čísla v tomto intervalu má stejnou paritu jako n. Průnik neprázdných do sebe vnořených uzavřených omezených intervalů je neprázdný omezený uzavřený interval (snadné cvičení) a α z tohoto průniku bude mít požadovanou vlastnost. Konstrukce: $[\alpha_1, \beta_1] = [5, 5.9]$. Interval $[\alpha_n^{n+1}, \beta_n^{n+1}]$ má délku alespoň $5 \cdot 0.9 = 4.5$ a určitě obsahuje podinterval $[k, k+3]$, $k \in \mathbb{N}$, ze kterého lze vybrat $[\alpha_{n+1}^{n+1}, \beta_{n+1}^{n+1}]$. Pozn: Pro polouzavřené intervaly není samozřejmostí, že jejich průnik něco obsahuje, např. $[1 - \frac{1}{n}, 1)$.

4. Jde to pro všechna w neležící v $[0, \infty)$. Pro nezáporná reálná čísla takový polynom zjevně neexistuje. Pro záporná reálná čísla funguje polynom $x - w$. Pokud w je nereálné komplexní číslo, označme jako θ jeho argument. Protože w je kořenem reálného polynomu právě tehdy, když $\overline{w}$, můžeme předpokládat, že $0 < \theta < \pi$. Nechť m je nejmenší přirozené číslo takové, že $m\theta > \frac{\pi}{2}$. Pak $(m-1)\theta \leq \frac{\pi}{2}$, čili $\frac{\pi}{2} < m\theta \leq \frac{\pi}{2} + m < \frac{\pi}{2} + \pi = 3\frac{\pi}{2}$. Tedy argument w^m leží ostře mezi $\frac{\pi}{2}$ a $3\frac{\pi}{2}$, tedy w^m má ostře zápornou reálnou část. To pak znamená, že $Q(x) = (x - w^m)(x - \overline{w}^m) = x^2 - 2\Re(w^m)x + |w^m|^2$ je polynom s kladnými koeficienty a kořenem w^m. Nyní stačí vzít $P(x) = (x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1)Q(x^m)$. Protože $Q(w^m) = 0$, je $P(w) = 0$. Zároveň platí

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{3m-1} + x^{3m-2} + \cdots + x^{2m} - 2\Re(w^m)(x^{2m-1} + x^{2m-2} + \cdots + x^m) \\ &\quad + |w^m|(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + 1), \end{aligned}$$

tedy P má všechny koeficienty kladné reálné.