6. soutěžní série – řešení

1. Pokud by Petr rozdělil kameny do hromádek aspoň čtyř různých velikostí, potřeboval by alespoň $1+2+3+4=10$ kamenů, proto se objeví nejvýše tři různé velikosti. Navíc na hromádkách jedné z velikostí musí být alespoň čtyři kameny, jinak by na všech byly právě tři, ale trojku nelze naskládat z dvojek ani z čísel větších než tři, tedy jediné dvě velikosti by v takovém případě byly jedna a tři. Proto dá Petr aspoň čtyři kameny na hromádky stejné velikosti, ty dá Pavel na hromádky nejvýše tří různých velikostí, a proto dva skončí na hromádkách stejné velikosti.

2. Pokud si všimneme, že $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(a^2c^2+b^2d^2-a^2d^2-b^2c^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$, je snadné najít rozklad indukcí na počet členů n.

Jiné řešení: Přímo najdeme rozklad $\prod_{k=1}^n(a_k^2-b_k^2)=\prod_{k=1}^n(a_k+b_k)\prod_{k=1}^n(a_k-b_k)\stackrel{*}{=}(A+B)(A-B)=A^2-B^2$, kde součin $\prod_{k=1}^n(a_k-b_k)$ je roven 2^n členům $\sum_{I\subset 1,\dots,n}(-1)^{|I|}\prod_{i\notin I}a_i\prod_{i\in I}b_i$. Tedy A obsahuje členy se sudým počtem b_i a B obsahuje členy s lichým počtem b_i.

3. Označme první rovnost ze zadání $(*)$ a druhou rovnost ze zadání $(**)$. Komutativita: $a\circ b\stackrel{*}{=}(a\circ b)\circ(a\circ b)\stackrel{**}{=}((a\circ b)\circ a)\circ b\stackrel{**}{=}((a\circ a)\circ b)\circ b\stackrel{*}{=}(a\circ b)\circ b\stackrel{**}{=}(b\circ b)\circ a\stackrel{*}{=}b\circ a$. Asociativita: $(a\circ b)\circ c\stackrel{**}{=}(b\circ c)\circ a\stackrel{komut.}{=}a\circ(b\circ c)$.

4. Nemusí existovat. Uvažujme funkci $f(x)=\sqrt{2}\chi_{x\in\mathbb{Q}}$, zobrazující racionální čísla na $\sqrt{2}$ a iracionální čísla na nulu a předpokládejme, že najdeme odpovídající funkci g.

Pokud $g(\sqrt{2})\notin\mathbb{Q}$, pak $g(g(g(\sqrt{2})))=f(g(\sqrt{2}))=0$ a zároveň $g(g(\sqrt{2}))=f(\sqrt{2})=0$, tedy $g(g(g(\sqrt{2})))=g(0)=0$, odkud plyne $\sqrt{2}=f(0)=g(g(0))=0$, spor.

Pokud $g(\sqrt{2})\in\mathbb{Q}$, pak $g(g(g(\sqrt{2})))=f(g(\sqrt{2}))=\sqrt{2}$ a zároveň $g(g(\sqrt{2}))=f(\sqrt{2})=0$, tedy $g(g(g(\sqrt{2})))=g(0)=\sqrt{2}$, odkud plyne $\sqrt{2}=f(0)=g(g(0))=g(\sqrt{2})\in\mathbb{Q}$, spor.