6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 20. 12. 2021.

Úloha 1. Mějme pravidelný n-úhelník $P_1 \dots P_n$ se středem O a bod X ležící vně n-úhelníku na přímce OP_1. Dokažte

$$|XP_1| \cdot |XP_2| \cdot \dots \cdot |XP_n| + |OP_1|^n = |OX|^n.$$

Úloha 2. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho trojic celých čísel a, b, c splňujících vztah $ab + bc + ca = 1$, pro které je $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ čtvercem celého čísla.

Úloha 3. Nechť $a_1, \dots, a_n$ jsou reálná nenulová čísla. Nechť $a_{i,j} = \max\{a_i, a_j\}$ a nechť A je matice s prvkem $a_{i,j}$ na místě (i, j). Ukažte, že hodnost A je rovna počtu různých hodnot v posloupnosti $a_1, \dots, a_n$.

Úloha 4. Označme $C(n)$ počet různých multimnožin, které jsou tvořeny prvočísly se součtem n. Dokažte, že $C(n + 1) \geq C(n)$.

Úloha 5. Najděte všechny spojitě diferencovatelné funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $q \in \mathbb{Q}$ mají q a $f(q)(\in \mathbb{Q})$ stejné jmenovatele v základním tvaru.

Úloha 6. Nechť $a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n$ jsou kladná reálná čísla taková, že $\prod_{i=1}^n a_i = 1$ a $\sum_{i=1}^n x_i = n$. Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)a_i x_i + 1} \geq 1.$$