4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 22. 11. 2021.

Úloha 1. Na zájezdu je $2n+1$ lidí. Pro každou skupinu n lidí existuje někdo mimo tuto skupinu, který zná všechny z této skupiny. Ukažte, že některý účastník zájezdu zná všechny ostatní.

Úloha 2. Nechť matice A splňuje $A^4 = I$. Ukažte, že pak matice $A^2 + (A \pm I)^2$ jsou invertovatelné.

Úloha 3. Nalezněte všechny nezáporné spojité funkce $f : [0,1] \to [0,\infty)$ takové, že platí

$$\int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 f^2(x)\,dx \ldots \int_0^1 f^{2020}(x)\,dx = \left(\int_0^1 f^{2021}(x)\,dx\right)^{1010}.$$

Úloha 4. Najděte komutativní okruh R (nemusí obsahovat jednotku) s co nejméně prvky, který má právě pět ideálů (včetně 0 a R).

⋆ **Úloha 5.** Ukažte, že pro každá přirozená čísla a, k a d existuje takové přirozené číslo n, pro něž d dělí $ka^n + n$.

⋆ **Úloha 6.** Sjednocením tří stromů vznikne graf G. Plyne odtud, že jej lze vyjádřit také jako sjednocení dvou rovinných grafů?

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`