

### 3. soutěžní série

1. 11. 2021

**Úloha 1.** Nalezňte všechny dvojice kladných celých čísel  $x, y$  takových, že

$$3^x + x^4 = y! + 2019.$$

(5 bodů)

**Úloha 2.** Pro která  $\alpha \in \mathbb{R}$  existuje spojitá funkce  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  splňující  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ ,  $\int_0^1 xf(x) dx = \alpha$ ,  $\int_0^1 x^2f(x) dx = \alpha^2$ ?

(10 bodů)

**Úloha 3.** Nechť  $G$  je konečná grupa, pro kterou platí, že kdykoliv  $H$  a  $K$  jsou podgrupy  $G$ , pak je buď jedna z nich podgrupou druhé, nebo jsou izomorfní. Ukažte, že každou podgrupu  $G$  lze nagenarovat nanejvýš dvěma prvky  $G$ .

(10 bodů)

**Úloha 4.** Je možné pokrýt třírozměrný prostor pomocí navzájem mimoběžných přímk?

(15 bodů)