3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 8. 11. 2021.

Úloha 1. Jsou grupy $(\mathbb{Q}, +)$ a $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ izomorfní? (tj. existuje bijekce $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+$ splňující $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}$?)

Úloha 2. Petřík kreslí obrázky. Nejprve vždy nakreslí černou půlkružnici spojující oba spodní rohy papíru. Na tu pak v pravidelných rozestupech nakreslí 2021 bodů, každý buď červenou nebo modrou pastelkou, přičemž první a poslední bod leží na krajích půlkružnice. Poté spojí některé dvojice bodů žlutými úsečkami. Za pěkné považuje Petřík ty obrázky, kde každá úsečka spojuje různobarevné body a každý bod je levým krajním bodem nejvýše jedné úsečky. Kolik různých pěkných obrázků si může Petřík pověsit na nástěnku?

Úloha 3. Pro přirozené číslo n buď $f(n)$ rovno jedna plus součet prvočíselných dělitelů počítaných dle jejich násobnosti, tj. např. $f(12) = 1+2+2+3 = 8$. Ukažte, že pro každé přirozené číslo n je posloupnost n, $f(n)$, $f(f(n))$, …od některého členu periodická a určete její periodu.

Úloha 4. Pro čtvercovou matici A definujme

$$\sin A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

Rozhodněte, zda existuje matice A splňující $\sin A = \begin{pmatrix} 1 & 2021 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Úloha 5. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla. Dokažte, že

$$\frac{2}{a^2} + \frac{5}{b^2} + \frac{45}{c^2} > \frac{16}{(a+b)^2} + \frac{24}{(b+c)^2} + \frac{48}{(c+a)^2}.$$

$\star$ **Úloha 6.** Nechť $f : [0,1] \to [0,1]$ je spojitá bijekce, pro kterou platí $f(0) = 0$. Dále nechť $\alpha \geq 0$. Ukažte, že pak platí

$$(\alpha + 2) \int_0^1 x^\alpha \left(f(x) + f^{-1}(x) \right) \leq 2.$$

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`