1. soutěžní série

4. 10. 2021

Úloha 1. Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť A_n označuje číslo sestávající z $2n$ čtyřek a B_n číslo sestávající z n osmiček. Ukažte, že $A_n + 2B_n + 4$ je vždy druhou mocninou přirozeného čísla. (5 bodů)

Úloha 2. Nechť $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ a $x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3$ pro $n \geq 1$. Ukažte, že posloupnost (x_n) konverguje k 0. (10 bodů)

Úloha 3. Mějme n dětí ve škole, z nichž některé dvojice dětí jsou kamarádi. (Kamarádství je vždy vzájemné a nikdo není svůj vlastní kamarád.) Předpokládejme, že každé dítě má alespoň jednoho, ale nanejvýš 2021 kamarádů. Nechť d_i je počet kamarádů i-tého dítěte. Označme si celkový počet kamarádství (tj. počet neuspořádaných dvojic kamarádů) jako m. Ukažte, že

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 4044m - 2021n.$$

(10 bodů)

Úloha 4. Nechť A je matice typu $m \times n$ s racionálními prvky a nechť mezi absolutními hodnotami prvků A je $m + n$ navzájem různých prvočísel. Ukažte, že hodnost A je alespoň 2. (15 bodů)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`