

# 7. soutěžní série

4. 1. 2021

**Úloha 1.** Najděte všechny polynomy  $P$  s celočíselnými koeficienty splňující  $P'(P(x)) = P(P'(x))$  pro všechna reálná  $x$ . (5 bodů)

**Úloha 2.** Nechť  $\alpha_n$  je posloupnost kladných reálných čísel a necht'  $\beta_n = \alpha_n^{\frac{n}{n+1}}$ . Ukažte, že  $\sum \alpha_n$  konverguje právě tehdy když konverguje  $\sum \beta_n$ . (10 bodů)

**Úloha 3.** Buď  $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$  posloupnost prvočísel a  $x_0 \in (0, 1)$  reálné. Pro  $k \in \mathbb{N}$  definujme členy posloupnosti předpisem

$$x_k = \left\{ \frac{p_k}{x_{k-1}} \right\}, \quad \text{je-li } x_{k-1} \neq 0,$$

(zde  $\{x\}$  je desetinná část  $x$ ) a  $x_k = 0$ , je-li  $x_{k-1} = 0$ . Najděte všechna  $x_0$ , pro která se posloupnost  $x_0, x_1, x_2, \dots$  někdy stane nulovou. (10 bodů)

**Úloha 4.** Body roviny obarvíme třemi barvami. Ukažte, že pro některou z barev nastanou všechny vzdálenosti, tedy pro každé  $d > 0$  existují dva body této barvy se vzdáleností  $d$ . (15 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.