6. soutěžní série – řešení

1. Rok má $365 = 52 \cdot 7 + 1$ dnů a přestupné roky se opakují s periodou 400. Počet dnů ve 400 letech je $400 \cdot (52 \cdot 7 + 1) + \frac{400}{4} - \frac{400}{100} + \frac{400}{400} \equiv 400 + 100 - 4 + 1 = 497 \equiv 0 \pmod 7$. To znamená, že posloupnost dnů v týdnu, ve kterých je Štědrý večer, má periodu 400. Takže každý den v týdnu má pravděpodobnost ve tvaru $\frac{k}{400}$, ale $7 \nmid 400$, takže čtvrtek nemůže mít pravděpodobnost $\frac{1}{7}$. Vychází, že pondělí, čtvrtek a sobota mají šanci $\frac{58}{400}$, úterý a středa $\frac{57}{400}$, a pátek a neděle $\frac{56}{400}$.

2. Uvažujme obecné n tvaru $2^b \prod_{i=1}^m p_i^{a_i}$, kde p_i jsou lichá po dvou různá prvočísla. Pak dosadíme $n = 20!$. Jelikož k a $k+1$ jsou navzájem nesoudělná, $p_i^{a_i}$ dělí $\frac{1}{2}k(k+1)$ právě když $k \equiv 0, -1 \pmod{p_i^{a_i}}$, respektive 2^b dělí $\frac{1}{2}k(k+1)$ právě pro $k \equiv 0, -1 \pmod{2^{b+1}}$. Tím dostáváme $m+1$ podmínek a dle Čínské zbytkové věty najdeme 2^{m+1} vyhovujících k mezi čísly $0, \dots, 2n-1$. Pokud vyhovuje k, pak také vyhovuje $2n-1-k$ díky $(2n-1-k)(2n-1-k+1) \equiv (-1-k)(-k) = k(k+1) \pmod{2n}$, takže mezi čísly $0, \dots, n-1$ vyhovuje 2^m k. My hledáme k mezi $1, \dots, n$, $k = 0$ je řešením a $k = n$ je řešením jen pro lichá n, takže pro sudé n najdeme $2^m - 1$ vyhovujích k. Naše $n = 20!$ je dělitelné sedmi lichými prvočísly, takže počet k je 127.

3. Protože $3A^3 - A^2 - A - I = 0$. To znamená, že charakteristický polynom matice A je dělitelem polynomu $3x^3 - x^2 - x - 1 = (x-1)(3x^2 + 2x + 1)$. Polynom $3x^2 + 2x + 1$ má kořeny $-\frac{\sqrt{2}}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3}$. Jejich absolutní hodnoty jsou $\sqrt{\frac{2}{9} + \frac{2}{9}} = \frac{2}{3} < 1$. Takže charakteristický polynom matice A má všechny prvky různé, tedy speciálně musí jít napsat jako $A = RDR^{-1}$, kde D je diagonální matice. Na diagonále D mohou být jedině čísla 1 a $-\frac{\sqrt{2}}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3}$ (ne nutně všechna). Pro každé n bude D^n digonální matice s mocninami těch samých čísel na diagonále. Mocněním jedničky nám zůstane jednička, mocněním $-\frac{\sqrt{2}}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3}$ se blížíme k nule, protože tato čísla jsou v absolutní hodnotě menší než jedna. Tedy D^n se bude limitně blížit k diagonální matici C, která má na diagonále jen nuly a jedničky. To ale znamená, že $C^2 = C$. Potom $B = \lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} RD^nR^{-1} = R\left(\lim_{n\to\infty} D^n\right)R^{-1} = RCR^{-1}$. Tedy $B^2 = RC^2R^{-1} = RCR^{-1} = B$.

4. Z definice je ihned vidět, že všechny polynomy mají nezáporné koeficienty a absolutní člen 1, tj. pro všechna n platí $p_n(0) = 1$ a $p_n(x) > 0$ pro všechna $x \geq 0$. Dále vidíme, že $a_1 = -1$ a $a_2 = -\frac{1}{2}$ a z definice a_n plyne, že $p_n(x) > 0$ pro všechna $x > a_n$.

Dokážeme indukcí, že $p_{n+1}(a_n) < 0$. Odtud bude plynout existence a_{n+1} a monotonie posloupnosti. Platí $p_{2n+1}(a_{2n}) = (n+1)a_{2n}p_{2n-1}(a_{2n}) < 0$, protože $a_{2n} < 0$ a dle indukčního předpokladu $a_{2n} > a_{2n-1}$, tedy $p_{2n-1}(a_{2n}) > 0$. Podobně $p_{2n+2}(a_{2n+1}) = (n+1)a_{2n+1}p_{2n}(a_{2n+1}) < 0$.

Dále dokážeme indukcí $a_{2n-1} > -\frac{1}{n-1}$ a $a_{2n} > -\frac{1}{n}$. Pro $n = 1$ druhá nerovnost platí. Indukční krok: z monotonie máme ihned $a_{2n+1} > -\frac{1}{n}$. Pokud $p_{2n-1}(-\frac{1}{n+1}) \leq 0$, pak $a_{2n-1} \geq -\frac{1}{n+1}$ a z monotonie $a_{2n+2} > -\frac{1}{n+1}$. Pokud naopak $p_{2n-1}(-\frac{1}{n+1}) > 0$, pak $p_{2n+2}(-\frac{1}{n+1}) = p_{2n+1}(-\frac{1}{n+1}) - p_{2n}(-\frac{1}{n+1}) = -p_{2n-1}(-\frac{1}{n+1}) < 0$, tedy i v tomto případě $a_{2n+2} > -\frac{1}{n+1}$ a důkaz je hotov.