

### 3. soutěžní série

2. 11. 2020

**Úloha 1.** Ukažte, že v každém souvislém grafu se sudým počtem hran lze orientovat hrany tak, aby z každého vrcholu vycházel sudý počet hran. (5 bodů)

**Úloha 2.** Určete, pro jaké vektory  $v \in \mathbb{R}^n$  je řada

$$\sum_{p=1}^{\infty} (\|v\|_p - \|v\|_{\infty})$$

konvergentní?

Jako obvykle, pro  $v = (v_1, \dots, v_n)$  je  $\|v\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{1/p}$  a  $\|v\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ . (10 bodů)

**Úloha 3.** Najděte všechny trojice celých čísel  $(x, y, z)$ , že  $4^x + 4^y + 4^z$  je čtverec. (10 bodů)

**Úloha 4.** Nechť  $f$  je racionální funkce (podíl dvou reálných polynomů) nabývající celočíselné hodnoty  $f(n) \in \mathbb{Z}$  v nekonečně mnoha celých číslech  $n \in \mathbb{Z}$ . Ukažte, že  $f$  už musí být polynom. (15 bodů)

Vaše řešení nahrávejte do moodlu. Je možno nahrát i více souborů. Uvítáme, pokud jména souborů budou indikovat, které úlohy soubor obsahuje.