3. soutěžní série – řešení

1. Hrany orientujme libovolně. Lichý počet hran bude vycházet ze sudého počtu vrcholů. Vybereme libovolné dva, najdeme neorientovanou cestu mezi nimi a prohodíme směry všech hran na této cestě. Tím se vymění parita počtu vycházejících hran z konců cesty, ale zbylé hrany se neovlivní. Opakujme dokud nezískáme vyhovující orientovaný graf.

2. Ukážeme, že řada konverguje, právě když jedna souřadnice vektoru v je v absolutní hodnotě ostře větší než ostatní souřadnice. Předpokládejme (BÚNO), že $|v_1| = \max_{1\leq k\leq n} |v_k|$ a že $\max_{2\leq k\leq n} |v_k| = t|v_1|$.

Pokud $t < 1$, pak

$$\|v\|_p - \|v\|_\infty \leq |v_1| \left((1 + (n-1)t^p)^{1/p} - 1 \right) = |v_1| \left(e^{\frac{1}{p} \ln(1+(n-1)t^p)} - 1 \right) \sim \frac{1}{p}(n-1)t^p$$

a řada konverguje dle srovnávacího kritéria.

Pokud naopak $t = 1$, pak divergence řady plyne ze srovnání

$$\|v\|_p - \|v\|_\infty \geq |v_1| \left(2^{1/p} - 1 \right) = |v_1| \left(e^{\frac{1}{p} \ln 2} - 1 \right) \sim \frac{1}{p} \ln 2.$$

3. BÚNO předpokládejme, že $x \leq y \leq z$. Protože 4^x je čtverec, který dělí $4^x + 4^y + 4^z$, musí i $1 + 4^{y-x} + 4^{z-x}$ být čtverec. Proto můžeme dočasně předpokládat, že $x = 0$ a tedy že $1 + 4^y + 4^z$ je čtverec.

Protože $1 + 4^y + 4^z > (2^z)^2$, musí být $1 + 4^y + 4^z \geq (2^z + 1)^2 = 1 + 2^{z+1} + 4^z$, čili $2y \geq z + 1$.

Pokud $y = 0$, je $4^z + 2$ čtverec. Ale protože 4^z dává po dělení čtyřmi zbytek 1 (když $z = 0$) nebo 0 (jindy), je $4^z + 2$ kongruentní 2 nebo 3 modulo čtyři, což nemůže být čtverec. Tedy $y > 0$.

Díky tomu je $1 + 4^y + 4^z$ liché číslo, tedy lze napsat jako

$$1 + 4^y + 4^z = (2t + 1)^2 = 4t^2 + 4t + 1.$$

Z toho dostáváme $4^y + 4^z = 4t(t + 1)$, neboli

$$4^{y-1}(4^{z-y} + 1) = t(t + 1).$$

Kdyby $y = z$, pak $2^{2y-1} = t(t + 1)$, z čehož je $t = 1$ a tedy $y = 1$. To nám dává funkční řešení $y = z = 1$. Dále předpokládejme, že $z > y$.

Protože $z > y$, je $4^{z-y} + 1$ liché a tedy nesoudělné s 4^{y-1}. Protože zároveň t a $t+1$ jsou nesoudělná čísla, platí díky rovnosti $4^{y-1}(4^{z-y}+1) = t(t+1)$ buď $4^{y-1} \mid t$ a $t+1 \mid 4^{z-y}+1$, nebo $4^{y-1} \mid t+1$ a $t \mid 4^{z-y}+1$. V prvním případě dostaneme $4^{y-1} \leq t < t+1 \leq 4^{z-y}+1$, čili $4^{y-1} \leq 4^{z-y}$, čili $z \geq 2y - 1$. V druhém případě dostaneme $4^{y-1} \leq t + 1$ a $t \leq 4^{z-y} + 1$, čili $4^{y-1} \leq 4^{z-y} + 2$. Protože rozdíl mezi různými mocninami čtyřky je pokaždý rovný alespoň třem, je $4^{y-1} \leq 4^{z-y}$, tedy opět $z \geq 2y - 1$. Takže tak jako tak dostaneme $z \geq 2y - 1$. Ale protože už jsme výše ukázali, že $2y \geq z + 1$, musí být $2y = z + 1$. Všimněme si, že speciálně pro $y = 1$ dostaneme i $z = 1$, čímž dostáváme i speciální případ z varianty $y = z$.

Po zpětném přidání x a dostáváme, že všechna řešení jsou tvarů $(x, y, z) = (k, k+n, k+2n-1)$ a libovolných permutací. Jednoduše ověříme, že tato vyhovují, protože $4^k + 4^{k+n} + 4^{k+2n-1} = (2^k + 2^{2n+k-1})^2$.

4. Neznámá funkce je tvaru $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i x^i}$, $a_n, b_m \neq 0$. Existuje posloupnost $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ bodů, pro které $f(x_j) \in \mathbb{Z}$. Speciálně $q(x_j) \neq 0$, takže v bodech x_j nebude problém s dělením nulou. Bez újmy na obecnosti $\lim_{j\to\infty} |x_j| = \infty$. Zatím předpokládejme, že všechny koeficienty v $p(x)$ a $q(x)$ jsou racionální. Dělením se zbytkem dostáváme $f(x) = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kde $\deg r < \deg q$. Rovnici vynásobíme číslem $N \in \mathbb{N}$ takovým, aby polynom $Ns(x)$ měl celočíselné koeficienty. Pak levá strana $Nf(x_j) - Ns(x_j) = \frac{Nr(x_j)}{q(x_j)}$ je celá a pravá strana díky vyššímu stupni jmenovatele konverguje k nule. Proto je $r(x_j)$ od nějakého j_0 nulové, polynom s nekonečně mnoha kořeny je nulový a zkoumaná funkce f je polynom. Zbývá zdůvodnit racionalitu koeficientů $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$. Pro pevné x_j z rovnosti $\sum_{i=0}^{n} a_i x_j^i = f(x_j) \sum_{i=0}^{m} b_i x_j^i$ dostáváme lineární rovnici pro $n+m+2$ neznámých. Těchto rovnic je nekonečně mnoho, předem víme, že existuje nenulové řešení, a odtud plyne existence polynomů p_1, q_1 s racionálními koeficienty splňující $\frac{p_1(x_j)}{q_1(x_j)} = f(x_j) = \frac{p(x_j)}{q(x_j)}$ zatím jen v bodech $x_j, j \in \mathbb{N}$. Polynom $p_1(x)q(x) - p(x)q_1(x)$ má nekonečně mnoho kořenů a tedy $f(x) = \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ kromě konečně mnoha kořenů polynomů q a q_1.