2. soutěžní série – řešení

1. Nechť svíčka vydrží hořet k hodin. Protože každou svíčku zapálíme vždy přesně na celou hodinu, je k celé číslo. Zároveň protože máme celkem k dispozici nk svíčkohodin, i-tý den se vypotřebuje i svíčkohodin, a na konci n-tého dne jsou dokonale vypotřebovány všechny svíčkohodiny, platí

$$nk = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Z toho plyne $k = \frac{n+1}{2}$, tedy n musí být liché číslo.

Naopak nechť n je liché číslo. Mějme n svíček z nichž každá vydrží hořet $\frac{n+1}{2}$ hodin. V prvních $\frac{n-1}{2}$ dnech zapálíme každý den příslušný počet svíček náhodně. Naopak ve dnech $\frac{n+1}{2}$ až $n-1$ vždy i-tý den zapálíme přesně ty svíčky, které jsme nezapálili $(n-i)$-tý den. Potom platí, že každá svíčka pro každé i od jedné do $\frac{n-1}{2}$ hořela právě v jednom z dní i a $n-i$. Tedy na konci $(n-1)$-tého dne hořela každá svíčka přesně $\frac{n-1}{2}$-krát. Tedy po tom, co je všechny ještě n-tý den zapálíme, budou všechny vyhořelé.

2. S je souvislá: kdyby ne, existovaly by body $a < b < c$ takové, že $a, c \in S$, $b \notin S$, pak funkce $f : S \to \mathbb{R}$ daná předpisem $f(x) = \begin{cases} c, & x < b \\ a, & x > b \end{cases}$ je spojitá a bez pevného bodu.

S je omezená: kdyby ne, pak díky souvislosti je buď $f(x) = x + 1$ nebo $f(x) = x - 1$ spojitá bez pevného bodu.

S je uzavřená: kdyby ne, pak pro $S = (a, b)$ a $S = (a, b]$ je protipříkladem $f(x) = \frac{1}{2}(a+x)$ a pro $S = [a, b)$ je protipříkladem $f(x) = \frac{1}{2}(x + b)$.

3. Nechť $A = (a, a^2)$ a $B = (b, b^2)$. Přímka t_a je tečna k parabole $y = x^2$ v bodě A, tedy z hodnoty derivace má sklon $2a$. Takže t_a je daná rovnicí $y = 2ax - a^2$. Analogicky t_b je daná rovnicí $y = 2by - b^2$. Průsečík těchto přímek je v bodě $C = \left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$. Střed úsečky AB je $M = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$. Tedy těžnice trojúhelníku ABC má délku $m = \frac{a^2+b^2}{2} - ab = \frac{(a-b)^2}{2}$.

Protože trojúhelník, jehož vrcholy mají souřadnice (x_1, y_1), (x_2, y_2) a (x_3, y_3) má obsah

$$\frac{|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|}{2}$$

(viz např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Shoelace_formula`), dostaneme dosazením, že trojúhelník ABC má obsah

$$\begin{aligned} &\frac{\left|a(b^2 - ab) + b(ab - a^2) + \frac{a+b}{2}(a^2 - b^2)\right|}{2} \\ =&\frac{\left|2ab^2 - 2a^2b + 2ab^2 - 2a^2b + a^3 - ab^2 + a^2b - b^3\right|}{4} \\ =&\frac{\left|a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\right|}{4} = \frac{|a-b|^3}{4} = \frac{\left(\sqrt{2m}\right)^3}{4} = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

4. Maximem je $\lfloor\frac{(n+1)^2}{4}\rfloor$. Vrcholy označme $v_1, \ldots, v_n$. Buď $d(i, j)$ délka nejkratší cesty z v_i do v_j Nechť k je maximum $d(i, j)$ přes všechny $i \neq j$, neboli k je délka nejdelší z nejkratších cest mezi vrcholy. Přeznačme si vrcholy tak, aby tato cesta byla z v_k do v_{k+1} přes vrcholy $v_1, \ldots, v_{k-1}$. Ve sledu dále pokračujme cestami z v_{k+1} do v_{k+2}, z v_{k+2} do v_{k+3}, až nakonec z v_n do v_k, přičemž každá z těchto cest má délku nejvýše k. Tím jsme našli sled o délce nejvýše $k(n + 1 - k)$. Tento horní odhad nabývá maximum pro $k = \lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$, a to sice $\lfloor\frac{(n+1)^2}{4}\rfloor$. Silně souvislý graf, ve kterém opravdu neexistuje kratší uzavřený sled, má orientované hrany v_iv_{i+1}, kde $1 \leq i \leq k - 2$ a $v_{k-1}v_j$, v_jv_1, kde $k \leq j \leq n$.