Řešitelský seminář, série 1, úloha 6

Matouš Menčík

17.11.2019

Zadání

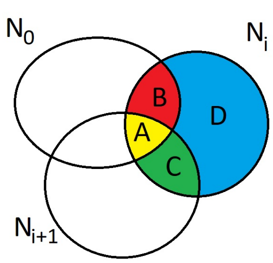
Rozhodněte, zdali existuje $c < 1$ takové, že kdykoliv je M mnohoúhelník v rovině s obsahem 1, pak se dá posunout o vzdálenost přesně $\frac{1}{100}$ na mnohoúhelník N tak, že obsah průniku M a N je nanejvýš c.

Řešení

Pro spor předpokládejme negaci tvrzení, tedy že pro každé $c < 1$ existuje mnohoúhelník M s obsahem 1, který po posunutí o $\frac{1}{100}$ libovolným směrem na mnohoúhelník N splňuje: Plocha $M \cap N$ je větší než c. O takovém mnohoúhelníku M říkejme, že má vlastnost (*).

Fixujme jedno takové c_0 a příslušný mnohoúhelník M s vlastností (*). Vlastnost (*) nezávisí na tom, kde se daný mnohoúhelník nachází, tedy i každý mnohoúhelník vzniklý posunutím M má vlastnost (*). Vezměme libovolnou posloupnost mnohoúhelníků $\{N_i\}_{i=0}^{\infty}$ takovou, že $N_0 = M$ a pro každé $i \in \mathbb{N}$ platí, že N_i vznikl z N_{i-1} posunutím o právě $\frac{1}{100}$ libovolným směrem.

Nyní tvrdím, že $\forall i \in \mathbb{N}$ plocha průniku N_0 a N_i je větší než $c_0 i - (i-1)$. Toto tvrzení dokážeme indukcí podle i. Pro $i = 1$ tvrzení plyne z toho, že $N_0 = M$ má vlastnost (*). Nyní předpokládejme platnost tvrzení pro i. Pak si mnohoúhelník N_i rozdělíme na čtyři části, jejichž obsahy označme A, B, C a D:



Pak platí následující:

- $A + B + C + D = 1$
- $A + B > c_0 i - (i - 1)$ (z indukčního předpokladu)
- $A + C > c_0$ (N_i má vlastnost (*), N_{i+1} vznikl posunutím N_i o $\frac{1}{100}$)
- $D \geq 0$

Pokud sečteme nerovnice a odečteme od nich rovnici, dostáváme $A > c(i+1) - i$, čímž je indukční krok dokázán.

O dvojici (b, v), kde b je bod mnohoúhelníku M a v je vektor $\mathbb{R}^2$ řekněme, že má vlastnost (**), pokud b po posunutí o v zůstal v mnohoúhelníku M. Zvolme náhodnou dvojici (b, v), $||v|| \leq 1$, a sledujme, jestli má vlastnost (**). Předpokládejme, že jsme nejprve náhodně zvolili v. Podívejme se nyní na mnohoúhelník N_{100}. Vzhledem k tomu, že posunutí mezi mnohoúhelníky N_i a N_{i+1} se pro různá i můžou lišit ve směru, může být N_{100} posunutý oproti N_0 libovolným směrem o libovolnou vzdálenost menší rovnou 1. Vezměme N_{100} jako M posunutý o v, víme, že průnik M a N_{100} musí být větší než $100c_0 - 99$. Pro libovolný $b \in M \cap N_{100}$ má dvojice (b, v) vlastnost (**), tedy pravděpodobnost, že při náhodné volbě b z celého M bude (b, v) mít (**), je větší než $100c - 99$. A pokud toto platí pro libovolný vektor v, pak i pro náhodnou dvojici (b, v) musí být pravděpodobnost (**) větší než $100c_0 - 99$.

Podívejme se nyní na tuto pravděpodobnost z pohledu, kdy nejprve zvolíme b. Pak musí existovat takové b_0, že pro náhodný vektor $||v|| \leq 1$ je pravděpodobnost, že (b_0, v) má (**), větší než $100c_0 - 99$. To odpovídá tomu, že kruh s poloměrem 1 a středem v b_0 má s M průnik s plochou větší než $100c_0 - 99$ plochy kruhu, tedy větší než $100c\pi - 99\pi$. Tento průnik ale nemůže mít větší plochu, než je plocha celého M, tedy 1. Z toho dostáváme $100c_0\pi - 99\pi < S_{M \cap N_{100}} \leq 1$, $c_0 < \frac{1+99\pi}{100\pi} \approx 0.993$. Tedy volbou $c = \frac{1+99\pi}{100\pi}$ jsme dosáhli toho, že žádný mnohoúhelník vlastnost (*) nemá, což je přesně to, co se po nás v zadání chtělo.