4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 27. 11. 2019.

Úloha 1. Buď $n \geq 3$ a x_i, y_j, $i, j = 1, \ldots, n$ libovolná reálná čísla. Pak $n \times n$ matice A tvořená čísly $a_{ij} = \sin(x_i + y_j)$ je singulární. Dokažte.

Úloha 2. Ukažte, že $\mathbb{R}^2$ má hustou podmnožinu, jejíž žádné tři body nejsou kolineární.

Úloha 3. Vrcholy mnohostěnu, jehož povrch je tvořen trojúhelníky, obarvíme třemi barvami. Ukažte, že počet trojúhelníků s vrcholy tří různých barev je sudý.

Úloha 4. Na kružnici o poloměru r leží tři body s celočíselnými souřadnicemi. Ukažte, že nějaké dva z nich mají vzdálenost alespoň $(2r)^{1/3}$.

Úloha 5. Řekneme, že posloupnost $\{x_i\}$ má césarovksou limitu, jestliže existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$. Najděte všechny funkce $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, které splňují: posloupnost $\{f(x_i)\}$ má césarovskou limitu, právě když má posloupnost $\{x_i\}$ césarovskou limitu.

$\star$ **Úloha 6.** Najděte všechna přirozená čísla $m > 1$, pro něž je m^3 součtem čtverců m po sobě jdoucích celých čísel.