1. soutěžní série – řešení

1. Jde to pro všechna n krom 3 a 5.

Pro sudá n použijeme pravidelný n-úhelník. Pro liché $n \geq 7$ vezmeme pravidelný $(n-3)$-úhelník, jednu jeho stranu rozpůlíme a na jednu z půlek zvenku přilepíme rovnoběžník (takový, aby v žádném z bodů nevznikl úhel $180°$.

Pro $n = 3$ to zjevně nejde. Kdyby to šlo pro $n = 5$, pak kdyby mezi stranami existovaly alespoň tři různé směry, pak jedna strana má nějaký směr jako jediná. Proto jsou jen dva různé směry, které mohou strany mít, tedy existují tři různé strany pětiúhelníka, které jsou rovnoběžné. Pak ale nějaké dvě musí sdílet koncový bod, což znamená, že v daném bodě svírají strany úhel $180°$, což nelze. Tedy pro $n = 5$ takový mnohoúhelník neexistuje.

2. Odpověď zní $2n - 3$.

Volbou $S = \{0, 2, \ldots, 2n-2\}$ dostaneme $A_S = \{1, 2, \ldots, 2n-3\}$.

Je-li naopak $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, kde $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, pak volbou $x_i = \frac{a_1+a_i}{2}$ a $y_i = \frac{a_i+a_n}{2}$ dostaneme $x_2 < x_3 < \cdots < x_n = y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1}$. čímž jsme dostali $2n-3$ různých čísel ležících v A_S.

3. Platí $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ pro sudé x a $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ pro liché x. Pokud je n liché, pak jsou dělitelé d_i liché, a proto $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 0 \pmod 4$, spor. Tedy $2|n$ a $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, speciálně $n \not\equiv 0 \pmod 4$. Odtud vidíme, že $\{d_3, d_4\} = \{p, q\}$ nebo $\{p, 2p\}$ pro nějaká lichá prvočísla p, q. V prvním případě bychom dostali $n \equiv 3 \pmod 4$, spor. Tedy $n = 5(1+p^2)$, $p = d_3 = 5$, a číslo $n = 130$ opravdu vyhovuje.

4. Taková posloupnost existuje. Zkuste ji zkonstruovat a řešení si předvedeme (nám předvedete) příští týden na semináři. Pokud chcete nápovědu, řekněte nebo napište si o ni.