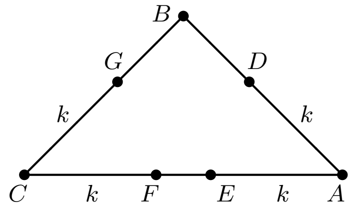
6. soutěžní série – řešení

1. Nechť $\varepsilon > 0$. Vezmeme n tak velké, že $z = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} < 2\varepsilon$. Množina obsahuje i všechny násobky čísla z, protože $kz = \sqrt[3]{k^3(n+1)} - \sqrt[3]{k^3 n}$. Nějaký násobek čísla z jistě padne do intervalu $(\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon)$.

2. Protože $16^2 = 256$, jistě dostanou 15 dárků děti 1,2,…,5. Nechť nejmenší čtverec obsažený v $[n-250, n+250]$ je k^2. Pak k musí splňovat $(k+14)^2 - k^2 \leq 501$, tj. $28k + 196 \leq 501$, tj. $k \leq \frac{305}{28} = 10\frac{25}{28}$ a $(k+15)^2 - (k-1)^2 > 502$, tj. $32k + 224 > 501$, tj. $k > \frac{277}{32} = 8\frac{21}{32}$. Tj. $k = 9$ nebo $k = 10$. Pro $k = 9$ je interval zdola omezený číslem 64 a shora číslem 576, tedy začíná číslem 65 až 75, tj. 11 možností. Pro $k = 10$ leží interval mezi čísly 81 a 625 a obsahuje 100, tj. začíná číslem 82 až 100, tj. 19 možností. Dohromady 35 dětí dostane přesně 15 dárků.

3. Označme $k = 2 - \sqrt{2}$ a označme D, E, F, G po řadě body ležící na polopřímkách AB, AC, CA, CB ve vzdálenosti k od bodů A, A, C, C (jako na obrázku). Pak vzdálenosti FD, EG, GD jsou také rovny k.



Předpokládejme pro spor, že body vzdálené aspoň k mají různou barvu. Nechť A má BÚNO barvu 1 a D barvu 2. Rozlišme dva případy: Pokud E má také barvu 2, pak G má BÚNO barvu 3, C má nutně barvu 4, F nutně barvu 3 a bod B nemůže mít žádnou z barev, spor. Pokud E nemá barvu 2, pak má BÚNO barvu 3, G musí mít barvu 4 a C nemůže mít žádnou z barev, spor.

4.

a) Pro každou z množin A_i, $1 \leq i \leq m$ uvažme vektor $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^n$, který má jedničky na pozicích odpovídajících prvkům A_i a nuly jinde. Jelikož $m > n$, je množina $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ lineárně závislá (nad $\mathbb{R}$), a tedy existují $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, které nejsou všechny nulové, pro něž platí $\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Označme $I_1 := \{i \in \{1, \ldots, m\} : \alpha_i > 0\}$ a $I_2 := \{i \in \{1, \ldots, m\} : \alpha_i < 0\}$.

Snadno ověříme, že I_1 a I_2 vyhovují zadání, neboť každé číslo $k \in \{1, \ldots, n\}$ je buď v obou množinách $\bigcup_{i \in I_1} A_i$, $\bigcup_{i \in I_2} A_i$ (to když $k \in A_j$ pro nějaké j takové, že $\alpha_j \neq 0$, potom se musí objevit obě znaménka, aby se k-tá pozice v sumě výše nasčítala na nulu), nebo v žádné (to pokud k není v žádné množině A_j s nenulovým α_j).

b) Budeme postupovat podobně, ale množiny A_i zakódujeme tak, že za jejich vektory přilepíme ještě vektory „doplňkové“: za n-složkový vektor $\boldsymbol{v_i}$ přilepíme jeho kopii, ve které zaměníme jedničky za nuly a naopak. Výsledkem jsou tedy vektory $w_i \in \mathbb{R}^{2n}$, které kódují množiny A_i a jejich doplňky. Kdybychom nyní našli koeficienty β_i, $1 \leq i \leq m$, pro které $\sum_{i=1}^m \beta_i \boldsymbol{w}_i = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2n}$, pak jednak opět $\bigcup_{i \in I_1} A_i = \bigcup_{i \in I_2} A_i$ pro I_1 a I_2 definované analogicky jako v minulém bodě, ale navíc i

$$\bigcap_{i \in I_1} A_i = \left(\bigcup_{i \in I_1} (A_i)^c \right)^c = \left(\bigcup_{i \in I_2} (A_i)^c \right)^c = \bigcap_{i \in I_2} A_i,$$

což přesně chceme. Zbývá dokázat, že vektory $\boldsymbol{w}_1, \dots \boldsymbol{w}_m$ jsou lineárně závislé. Vzhledem k jejich konstrukci leží všechny v podprostoru $\mathbb{R}^{2n}$ generovaném „kanonickými" vektory

$$(\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{n}, \underbrace{-1, 0, \dots, 0}_{n}), (\underbrace{0, 1, \dots, 0}_{n}, \underbrace{0, -1, \dots, 0}_{n}), \dots, (\underbrace{0, 0, \dots, 1}_{n}, \underbrace{0, 0, \dots, -1}_{n})$$

s přidaným vektorem $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n})$. To je celkem $n+1$ vektorů, takže vzhledem k podmínce $m > n+1$ jsme hotovi.