5. soutěžní série – řešení

1. Součet k-tého a $(2019-k)$-tého členu je

$$\sin\frac{k}{2019}\cos\frac{2019-k}{2019}+\sin\frac{2019-k}{2019}\cos\frac{k}{2019}=\sin\left(\frac{k}{2019}+\frac{2019-k}{2019}\right)=\sin 1.$$

Součtem celé řady je $1009\sin 1$.

2. Neexistuje. Klíčové je uvědomit si, že mezi $2k$ čísly $\pi(k+1), \pi(k+2), \dots \pi(3k)$ musí být aspoň k čísel větších nebo rovných k. Pak už je to jednoduché: pro každé k máme

$$\sum_{n=k+1}^{3k}\frac{\pi(n)}{n^2}\geq\sum_{n=k+1}^{3k}\frac{\pi(n)}{(3k)^2}\geq k\cdot\frac{k}{(3k)^2}=\frac{1}{9},$$

z čehož už celkem snadno plyne divergence.

3. Každému číslu $i=1,\dots,n$ přiřadíme k-složkový vektor $v^i\in\mathbb{Q}^k$ (nad $\mathbb{R}$ by to fungovalo úplně stejně), přičemž na k-té pozici je jednička právě když $i\in A_k$ a nula v opačném případě. Jelikož $n>k$, existují racionální (ne všechna nulová) čísla $\alpha_1,\dots\alpha_n$ taková, že $\alpha_1v^1+\cdots+\alpha_nv^n=0$. Nyní pokud $\alpha_i>0$, obarvíme i modře, pokud $\alpha_i<0$, obarvíme i červeně a pokud $\alpha_i=0$, neobarvíme i vůbec. Tím jsme splnili první podmínku ze zadání. Druhá plyne z toho, že lineární kombinace je netriviální. Platnost třetí podmínky plyne z toho, že kdyby byla celá množina A_i vybarvena modře, resp. červeně, pak $\alpha_1v_k^1+\cdots+\alpha_nv_k^n>0$, resp. <0, což je spor s tím, že tato lineární kombinace dává nulový vektor.

4. Všimeme si, že počet číslic A_n je Fibonacciho číslo F_n. Pak dostáváme $A_n=A_{n-2}+10^{F_{n-2}}A_{n-1}\equiv A_{n-2}+(-1)^{F_{n-2}}A_{n-1}\pmod{11}$. Proto stačí sledovat poslední dvě čísla, a to sice zbytky po dělení 11 čísel A_n a paritu Fibonacciho čísel F_n. Zjistíme, že čísla F_n jsou postupně $1,1,0$ modulo 2 s periodou 3 a A_n jsou $0,1,-1,2,1,1,$ modulo 11 s periodou 6. Tedy $11|A_n$ právě, když $6|n-1$.